

Centres étrangers 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A. Etude de quelques exemples

1) a) Pour tout réel x de $[0, 1]$, posons $f(x) = k$ où k est un réel strictement positif.

$$A_1 = \int_0^a k \, dx = k(a - 0) = ka \quad \text{et} \quad A_2 = \int_a^1 k \, dx = k(1 - a).$$

Donc,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow ka = k(1 - a) \Leftrightarrow a = 1 - a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

b) Pour tout réel x de $[0, 1]$, posons $f(x) = x$.

$$A_1 = \int_0^a x \, dx = k(a - 0) = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^2}{2} \quad \text{et} \quad A_2 = \int_a^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1 - a^2}{2}.$$

Donc,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{1 - a^2}{2} \Leftrightarrow a^2 = 1 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{car } a > 0).$$

2) a) Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0, 1]$, $A_1 = \int_0^a f(x) \, dx$ et $A_2 = \int_a^1 f(x) \, dx$

b) Soit a un réel de $[0, 1]$.

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow \int_0^a f(x) \, dx = \int_a^1 f(x) \, dx \Leftrightarrow F(a) - F(0) = F(1) - F(a) \Leftrightarrow 2F(a) = F(0) + F(1) \Leftrightarrow F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}.$$

Ainsi, si a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$. Réciproquement, si $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$, alors a satisfait la condition (E) si $a \in [0, 1]$ et ne satisfait pas la condition (E) si $a \notin [0, 1]$.

3) a) On peut prendre pour F la fonction f . D'après la question précédente,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow e^a = \frac{e^0 + e^1}{2} \Leftrightarrow e^a = \frac{1 + e}{2} \Leftrightarrow a = \ln \left(\frac{1 + e}{2} \right).$$

On note que $\ln \left(\frac{1 + e}{2} \right) = 0,6 \dots$ et donc $\ln \left(\frac{1 + e}{2} \right) \in [0, 1]$.

b) Une primitive de la fonction f sur $[0, 1]$ est la fonction $F : x \mapsto -\frac{1}{x + 2}$.

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow -\frac{1}{a + 2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{0 + 2} - \frac{1}{1 + 2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{a + 2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{a + 2} = \frac{5}{12} \\ &\Leftrightarrow a + 2 = \frac{12}{5} \Leftrightarrow a = \frac{12}{5} - 2 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

De plus, $a \in [0, 1]$ et donc a convient.

Partie B. Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

1) Une primitive de la fonction f sur $[0, 1]$ est la fonction $F : x \mapsto 4x - x^3$.

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow 4a - a^3 = \frac{1}{2}(0 + 4 - 1) \Leftrightarrow 4a = a^3 + \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Donc si a satisfait la condition (E), a est solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$.

2) a) $u_1 = \frac{u_0^3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$.

b) La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel x de $[0, 1]$, $g'(x) = \frac{3x^2}{4}$. La fonction g' est positive sur $[0, 1]$ et donc la fonction g est croissante sur $[0, 1]$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

- $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{3}{8}$. Donc, $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. L'affirmation est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Puisque la fonction g est croissante sur $[0, 1]$, on en déduit que $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$ ou encore que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{5}{8}$. En particulier, on a $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

d) En particulier, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a alors $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^3}{4} + \frac{3}{8} \right) = \frac{\ell^3}{4} + \frac{3}{8}$. Ainsi, ℓ est un réel de $[0, 1]$ solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$.

D'après un résultat admis par l'énoncé, a est l'unique réel de $[0, 1]$ solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$ et donc $\ell = a$.

e) La calculatrice fournit

$$u_{10} = 0,38980784 \text{ à } 10^{-8} \text{ près par défaut.}$$