

Centres étrangers 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) Notons X la variable aléatoire égale à la masse, en grammes, d'une baguette de pain. La probabilité demandée est $P(X \geq 187)$. La calculatrice fournit $P(X \geq 187) = 0,903 \dots$. En particulier, $P(X \geq 187) \geq 0,9$.

L'affirmation 1 est vraie.

2) Pour x réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f(x) = x - \cos x$. La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

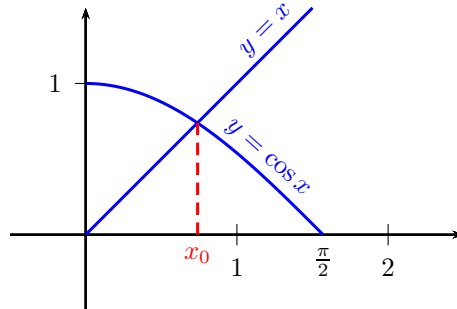
$$f'(x) = 1 - \sin x.$$

La fonction f' est donc strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis la fonction f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, la fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 et une seule dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

L'affirmation 2 est vraie.

On note que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\cos(x) = x$. Le graphique suivant montre alors l'existence et l'unicité de la solution.



3) Soient $M(1 + 2t, 2 - 3t, 4t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathcal{D}_1$ et $M'(-5t' + 3, 2t', t' + 4)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de $\mathcal{D}_2$.

$$\begin{aligned} M = M' &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = -5t' + 3 \\ 2 - 3t = 2t' \\ 4t = t' + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 4t - 4 \\ 1 + 2t = -5(4t - 4) + 3 \\ 2 - 3t = 2(4t - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 4t - 4 \\ 22t = 22 \\ -11t = -10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t' = 4t - 4 \\ t = 1 \\ t = \frac{10}{11} \end{cases}. \end{aligned}$$

Le système précédent n'a pas de solution et donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas sécantes.

L'affirmation 3 est fausse.

4) Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$ est le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(2, -3, 4)$ et un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1, 2, 1)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \times 1 + (-3) \times 2 + 4 \times 1 = 2 - 6 + 4 = 0.$$

$\vec{u}$ est orthogonale à $\vec{n}$ et donc la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$

L'affirmation 4 est vraie.