Asie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A : Premier modèle - avec une suite

1) a) Pour tout entier naturel n, notons u_n la masse, exprimée en grammes, de bactéries dans la cuve le n-ème jour.

Puisqu'initialement, la cuve contient 1 kg ou encore 1000 g de bactéries, on a effectivement $u_0 = 1\,000$.
Soit $n \geqslant 0$. La masse de bactéries l'année $n+1$ est obtenue en rajoutant à la masse de bactéries l'année n, c'est-à-dire u_n, 0,2 fois cette masse puis en soustrayant 100 g. Donc

$$u_{n+1} = u_n + 0,2u_n - 100 = 1,2u_n - 100.$$

b) 30 kg sont encore 30 000 g. La calculatrice fournit les valeurs suivantes :

n	u_n
0	1 000
1	1 100
2	1 220
3	1 364
4	$1\,536,8$
5	$1\,744,2\ldots$
6	$1\,993,0\ldots$
7	$2\,291,6\ldots$
8	$2\,649,9\ldots$
9	$3\,079,9\ldots$
10	$3\,595,9\ldots$
11	$4\,215,0\ldots$
12	$4\,958,1\ldots$
13	$5\,849,7\ldots$
14	$6\,919,6\ldots$
15	$8\,203,5\ldots$
16	$9\,744,2\ldots$
17	$11\,593,\ldots$
18	$13\,812,\ldots$
19	$16\,474,\ldots$
20	$19\,669,\ldots$
21	$23\,503,\ldots$
22	$28\,103,\ldots$
23	$33\,624,\ldots$

Le jour n° 23 ou encore au bout de 23 jours, la masse de bactéries dépasse 30 kg.

c) Algorithme complété.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u < 30\,000$ faire
	    u prend la valeur $1,2u - 100$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

- $u_0 = 1000$ et en particulier $u_0 \geqslant 1000$. L'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \geqslant 1000$. Alors $1,2u_n - 100 \geqslant 1,2 \times 1000 - 100$ ou encore $u_{n+1} \geqslant 1100$ et en particulier, $u_{n+1} \geqslant 1000$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

b) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = 1,2u_n - 100 - u_n = 0,2u_n - 100.$$

Puisque $u_n \geqslant 1000$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0,2 \times 1000 - 100$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 100$ et en particulier $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2u_n - 100 - 500 = 1,2u_n - 600 = 1,2\left(u_n - 500\right) = 1,2v_n.$$

Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$.

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n,$$

puis que

$$u_n = v_n + 500 = 500 \times 1,2^n + 500.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 500 \times 1,2^n + 500.}$$

c) Puisque $1,2 > 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,2^n = +\infty$ et on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Partie B : second modèle - avec une fonction

1) a) $f(0) = \dfrac{50}{1 + 49e^0} = \dfrac{50}{1 + 49} = 1.$

b) Soit t un réel positif. Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $1 + 49e^{-0,2t} > 1$ puis $\dfrac{1}{1 + 49e^{-0,2t}} < 1$ puis $50 \times \dfrac{1}{1 + 49e^{-0,2t}} < 50 \times 1$ et donc $\dfrac{50}{1 + 49e^{-0,2t}} < 50$.

On a montré que pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.

c) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ et ne s'annulant pas sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $t \geqslant 0$,

$$f'(t) = 50 \times \frac{-\left(1 + 49e^{-0,2t}\right)'}{\left(1 + 49e^{-0,2t}\right)^2} = 50 \times \frac{-49 \times \left(-0,2e^{-0,2t}\right)}{\left(1 + 49e^{-0,2t}\right)^2} = \frac{490e^{-0,2t}}{\left(1 + 49e^{-0,2t}\right)^2}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,2t} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \dfrac{50}{1 + 49 \times 0} = 50$.

2) La masse de bactéries est initialement de 1kg. Cette masse croît avec le temps, reste strictement inférieure à 50 kg et vaut environ 50 kg au bout d'une longue durée.

3) Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
f(t) > 30 &\Leftrightarrow \frac{50}{1+49e^{-0,2t}} > 30\\
&\Leftrightarrow \frac{1+49e^{-0,2t}}{50} < \frac{1}{30} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow 1+49e^{-0,2t} < \frac{5}{3} \Leftrightarrow 49e^{-0,2t} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{-0,2t} < \frac{2}{147}\\
&\Leftrightarrow -0,2t < \ln\left(\frac{2}{147}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow t > -\frac{1}{0,2}\ln\left(\frac{2}{147}\right) \Leftrightarrow t > 5\ln\left(\frac{147}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow t > 21,4\ldots
\end{aligned}$$

La masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

Partie C : un contrôle de qualité

Ici, $n = 200$ et on suppose que $p = 0,8$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 160$ et $n(1-p) = 40$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\begin{aligned}
\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] &= \left[0,8 - 1,96\frac{\sqrt{0,8\times 0,2}}{\sqrt{200}}; 0,8 + 1,96\frac{\sqrt{0,8\times 0,2}}{\sqrt{200}}\right]\\
&= [0,744; 0,856]
\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \frac{146}{200} = 0,73$. f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc l'affirmation de l'entreprise doit être remise en cause au risque de se tromper de 5%.

