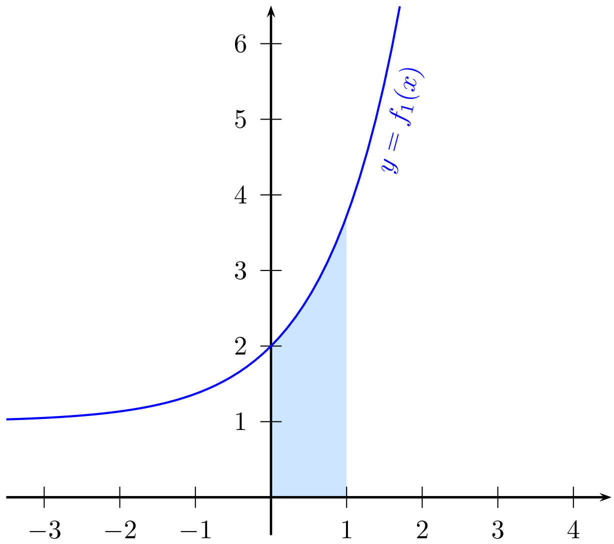
Asie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Pour tout réel x, $f_0(x) = 0$. Donc $I(0) = 0$.

2) a) Représentation graphique.



$I(1)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré en bleu.

b) $I(1) = \displaystyle\int_0^1 (e^x + 1)\,dx = [e^x + x]_0^1 = \left(e^1 + 1\right) - e^0 = e.$

$$\boxed{I(1) = e = 2,7 \text{ arrondi au dixième.}}$$

3) Soit a un réel de $[0, 1]$.

$$I(a) = \int_0^1 \left(ae^{ax} + a\right) dx = \left[e^{ax} + ax\right]_0^1 = \left(e^a + a\right) - e^0 = e^a + a - 1.$$

La fonction I est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel a de $[0, 1]$, $I'(a) = e^a + 1$. La fonction I' est strictement positive sur $[0, 1]$ et donc la fonction I est strictement croissante sur $[0, 1]$.

La fonction I est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$. De plus, $I(0) = 0 < 2$ et $I(1) = e > 2$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel a_0 de $[0, 1]$ et un seul tel que $I\left(a_0\right) = 2$.

La calculatrice fournit $I(0,792) = 1,999\ldots < 2$ et $I(0,793) = 2,003\ldots > 2$. Donc, $I(0,792) < I\left(a_0\right) < I(0,793)$. Puisque la fonction I est strictement croissante sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$\boxed{0,792 < a_0 < 0,793.}$$

