Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (7 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \dfrac{e}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

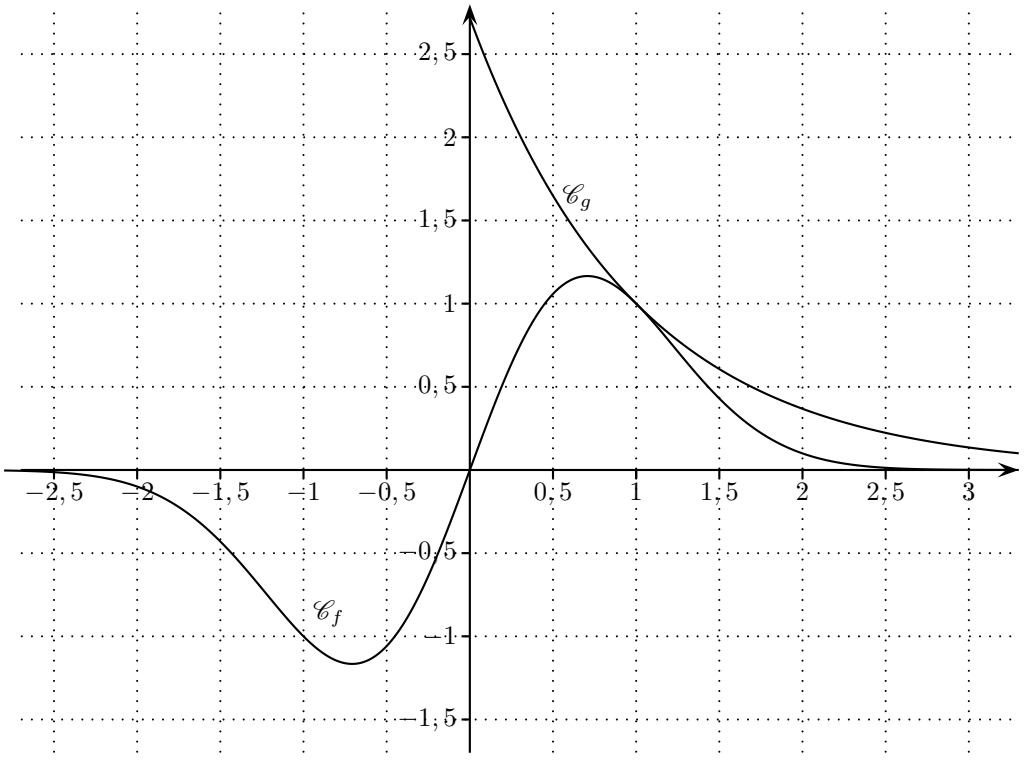
2) a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(1 - 2x^2\right) e^{1-x^2}.$$

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1) Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

2) Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.

3) Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ.
(Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.

c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.

4) a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.

c) Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1) Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right)\, dx$.

3) Interpréter graphiquement ce résultat.

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.