

Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Soit x un réel non nul.

$$f(x) = xe^{1-x^2} = x \times e \times e^{-x^2} = \frac{x^2}{x} \times e \times \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

Déjà, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$. Ensuite, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$. Par passage à l'inverse, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$. En multipliant, on obtient finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \times 0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2) a) Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x^2} + x \times (-2x)e^{1-x^2} = e^{1-x^2} - 2x^2e^{1-x^2} = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

b) Pour tout réel x , $e^{1-x^2} > 0$ et donc pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x^2 = -2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = -2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré permet alors de dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f					

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}} = 1,16\dots \text{ et } f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{\frac{e}{2}} = -1,16\dots$$

Partie B

1) Il semble que $\mathcal{C}_g$ soit au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ait un point commun et un seul, à savoir leur point d'abscisse 1.

2) Soit $x \in]-\infty, 0]$. Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) \leq 0$ et $g(x) > 0$. En particulier, $f(x) < g(x)$.

3) a) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\Leftrightarrow xe^{1-x^2} \leq e^{1-x} \\ &\Leftrightarrow \ln(xe^{1-x^2}) \leq \ln(e^{1-x}) \quad (\text{car } xe^{1-x^2} > 0 \text{ et } e^{1-x} > 0) \\ &\Leftrightarrow \ln(x) + \ln(e^{1-x^2}) \leq 1 - x \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - x^2 \leq 1 - x \\ &\Leftrightarrow \ln(x) - x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow \Phi(x) \leq 0. \end{aligned}$$

b) Pour tout réel $x > 0$,

$$\Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1 + x(-2x + 1)}{x} = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $\Phi'(x)$ est du signe de $-2x^2 + x + 1$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9$. Le trinôme $-2x^2 + x + 1$ a deux racines distinctes à savoir $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{-2 \times 2} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{-2 \times 2} = 1$. Le cours sur

le signe d'un trinôme du second degré montre alors que la fonction Φ' est strictement positive sur $]0, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1. La fonction Φ est donc strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

c) En particulier, la fonction Φ admet un maximum en 1 et ce maximum est

$$\Phi(1) = \ln(1) - 1^2 + 1 = 0.$$

On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $\Phi(x) \leq \Phi(1)$ ou encore $\Phi(x) \leq 0$.

4) a) D'après la question 3)a), pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leq g(x)$ et d'après la question 2), pour tout $x \leq 0$, on a $f(x) \leq g(x)$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$ et la conjecture de la question 1) de la partie B est donc valide.

b) D'après le résultat admis par l'énoncé, $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$ ou encore $x = 1$. Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont donc un point commun et un seul à savoir le point A de coordonnées $(1, g(1))$ ou encore $(1, 1)$.

c) On a $x_A = 1$ et $f(x_A) = 1 = g(x_A)$. D'autre part, $f'(x_A) = (1 - 2 \times 1^2) e^{1-1^2} = -1$ et $g'(x_A) = -e^{1-1} = -1$. Ceci montre déjà que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont le même tangente au point A. Une équation de cette tangente commune est $y = -(x - 1) + 1$ ou encore $y = -x + 2$.

Partie C

1) Pour tout réel x , $f(x) = xe^{1-x^2} = -\frac{1}{2} \times (-2x)e^{1-x^2} = -\frac{1}{2} \times (1 - x^2)' e^{1-x^2}$ et donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par : pour tout réel x , $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}$.

$$2) \int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx = \left[-e^{1-x} + \frac{1}{2}e^{1-x^2} \right]_0^1 = \left(-e^0 + \frac{1}{2}e^0 \right) - \left(-e^1 + \frac{1}{2}e^1 \right) = \frac{e-1}{2}.$$

3) Pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) \leq g(x)$. Donc, $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

