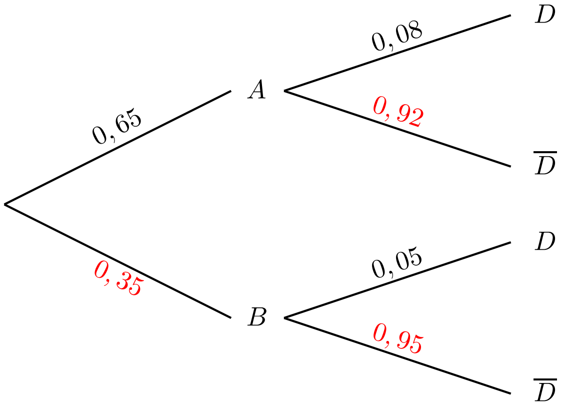
Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $P\left(\overline{D}\right)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P\left(\overline{D}\right) &= P(A) \times P_A\left(\overline{D}\right) + P(B) \times P_B\left(\overline{D}\right) \\ &= 0,65(1-0,08) + (1-0,65)(1-0,05) = 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,95 = 0,598 + 0,3325 = 0,9305. \end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(\overline{D}\right) = 0,9305.}$$

c) La probabilité demandée est $P_{\overline{D}}(A)$.

$$P_{\overline{D}}(A) = \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{0,65 \times 0,92}{0,9305} = 0,6427 \text{ arrondi Ã } 10^{-4}.$$

$$\boxed{P_{\overline{D}}(A) = 0,6427 \text{ arrondi Ã } 10^{-4}.}$$

2) Notons X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules sans défaut. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$ (probabilité qu'une ampoule sortie de la machine A soit sans défaut). En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « l'ampoule est sans défaut » avec une probabilité $p = 0,92$ et « l'ampoule a un défaut » avec une probabilité $1 - p = 0,08$.

La probabilité demandée est $P(X \geqslant 9)$.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \times 0,92^9 \times 0,08 + 0,92^{10} \\ &= 0,8121 \text{ arrondi Ã } 10^{-4}. \end{aligned}$$

Partie B

1) a) Soit $a \geqslant 0$.

$$P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a},$$

puis

$$P(T \geqslant a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}.$$

b) Soient a et t deux réels positifs.

$$\begin{aligned} P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+a) &= \frac{P((T \geqslant t+a)\cap(T \geqslant t))}{P(T \geqslant t)} = \frac{P(T \geqslant t+a)}{P(T \geqslant t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t-\lambda a+\lambda t} \\ &= e^{-\lambda a} = P(T \geqslant a). \end{aligned}$$

2) a) On sait que $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{10\ 000} = 0,000\ 1$.

b) $P(T \geqslant 5000) = e^{-0,000\ 1\times 5000} = e^{-0,5} = 0,6065$ arrondi à 10^{-4}.

c) La probabilité demandée est $P_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 12\ 000)$.

$$P_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 12\ 000) = P_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 7000+5000) = P(T \geqslant 5000) = e^{-0,5} = 0,6065 \text{ arrondi Ã } 10^{-4}.$$

$$\boxed{P_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 12\ 000) = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

Partie C

1) Ici, $n = 1000$ et $p = 0,06$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $np = 60$ et $n(1-p) = 940$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\begin{aligned} \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] &= \left[0,06 - 1,96\frac{\sqrt{0,06\times 0,94}}{\sqrt{1000}}; 0,06 + 1,96\frac{\sqrt{0,06\times 0,94}}{\sqrt{1000}}\right] \\ &= [0,0452; 0,0748]. \end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

2) La fréquence d'ampoules défectueuses observée est $f = \dfrac{71}{1000} = 0,071$. La fréquence f appartient à l'intervalle de fluctuation et on ne peut donc remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

