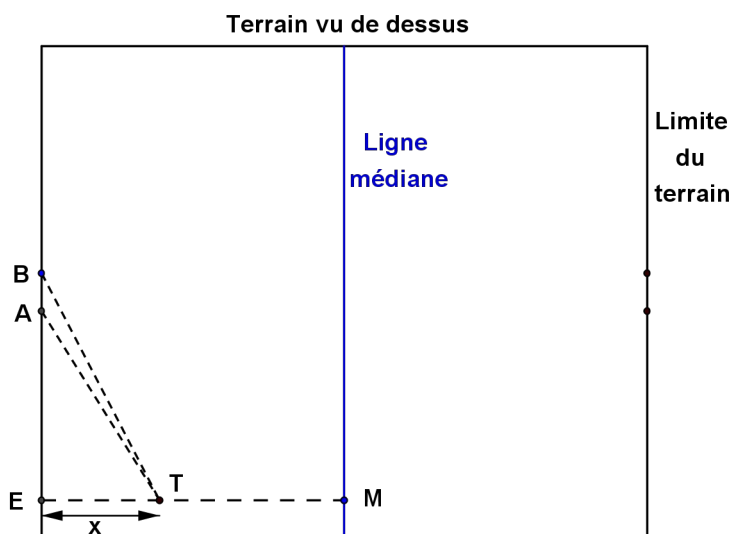


Exercice 4

5 points



Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir ci-dessus la figure) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.

La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Pour maximaliser ses chances de réussite le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur(en mètre) ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM=50$ m , $EA=25$ m et $AB=5,6$ m .

On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radians de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ en fonction de x .

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction $\tan$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$

Montrer que $\tan(\gamma) = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $[0; 50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.