Polynésie 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 60)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geqslant 60) = 1 - P(X \leqslant 60) = 0,006 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) L'énoncé fournit $\mu' = 50$ et $P(T' \leqslant 43) = 0,1$. Or

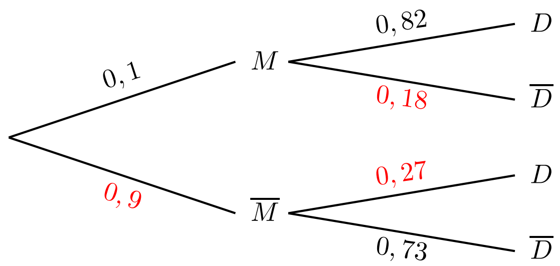
$$T' \leqslant 43 \Leftrightarrow T' - 50 \leqslant -7 \Leftrightarrow \frac{T'-50}{\sigma'} \leqslant -\frac{7}{\sigma'}.$$

La calculatrice fournit

$$P(T' \leqslant 43) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(\frac{T'-50}{\sigma'} \leqslant -\frac{7}{\sigma'}\right) = 0,1 \Leftrightarrow -\frac{7}{\sigma'} = -1,2815\ldots \Leftrightarrow \sigma' = 5,46 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

Partie B

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(M) \times P_D(M) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(D) = 0,1 \times 0,82 + (1-0,1)(1-0,73) = 0,082 + 0,243$$
$$= 0,325.$$

$$\boxed{P(D) = 0,325.}$$

2) $P_{\overline{D}}(M)$ est la probabilité qu'un individu ayant un test négatif soit tout de même malade.

$$P_{\overline{D}}(M) = \frac{P\left(M \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P(M) \times P_M\left(\overline{D}\right)}{1 - P(D)} = \frac{0,1(1-0,82)}{1-0,325} = \frac{0,018}{0,675} = \frac{2}{75} = 0,027 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{P_{\overline{D}}(M) = 0,027 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

3) L'énoncé demande $P_D(M)$.

$$P_D(M) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M) \times P_M(D)}{P(D)} = \frac{0,1 \times 0,82}{0,325} = \frac{0,082}{0,325} = \frac{82}{325} = 0,25 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

Le médecin a donc raison.

Partie C

Déterminons un intervalle de fluctuation au seuil 95%. Ici, $n = 300$ et $p = 0,82$. Notons que $n \geqslant 30$, $np = 246$ et donc $np \geqslant 5$ et aussi $n(1-p) = 52$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,82 - 1,96\sqrt{\frac{0,82 \times 0,18}{300}}; 0,82 + 1,96\sqrt{\frac{0,82 \times 0,18}{300}}\right] = [0,776; 0,864]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée sur l'échantillon est $f = 0,74$. f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. Donc, le dépistage ne peut pas être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun au risque de se tromper de 5%.

