Polynésie septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (7 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\text{Re}(z)$.

1) Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - i$.

2) Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $e^{i\theta}(1-i)$.

3) Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1) Conjecturer :

a) les limites des fonctions f et g en $+\infty$;

b) la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$;

c) la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal.

2) Justifier que $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3) Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4) a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$,

$$h'(x) = e^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right].$$

b) Justifier que, sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$,

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0.$$

c) En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

5) On admet que, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = \frac{1}{2}e^{-x}[-2 + \cos(x) - \sin(x)]$$

est une primitive de la fonction h.
On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.
Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

Annexe, Exercice 1