Polynésie 2015. Enseignement de spécifialité

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ puis

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\boxed{1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.}$$

2) Soit θ un réel.

$$e^{i\theta}(1-i) = e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

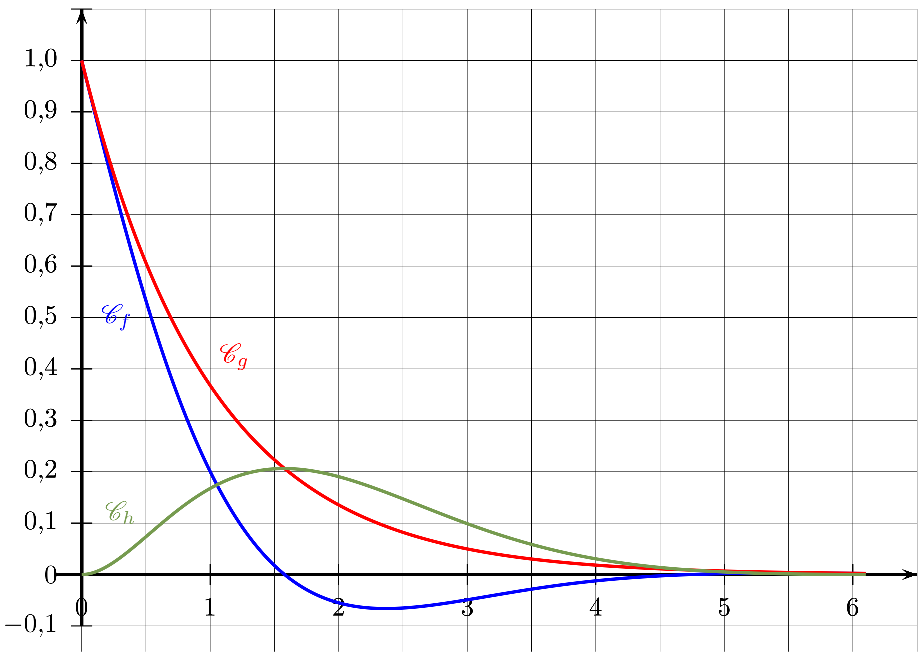
D'autre part,

$$\begin{aligned} e^{i\theta}(1-i) &= (\cos\theta + i\sin\theta)(1-i) = \cos\theta + i\sin\theta - i\cos\theta + \sin\theta \\ &= (\cos\theta + \sin\theta) + i(-\cos\theta + \sin\theta). \end{aligned}$$

3) Ainsi, $e^{i\theta}(1-i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ et aussi $e^{i\theta}(1-i) = (\cos\theta+\sin\theta)+i(-\cos\theta+\sin\theta)$. Par identification des parties réelles, on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout réel } \theta,\ \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).}$$

Partie B



1) Il semble que

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;
b) $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0,+\infty[$;
c) l'écart entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal quand x est environ égal à $1,5$.

2) Soit x un réel de $[0,+\infty[$. On a $\cos x \leqslant 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif e^{-x}, on obtient $e^{-x}\cos x \leqslant e^{-x}$ ou encore $f(x) \leqslant g(x)$.

Ainsi, pour tout réel x de $[0,+\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$ et donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0,+\infty[$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$.

Pour tout réel positif x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. En multipliant les trois membres de cet encadrement par le réel positif e^{-x}, on obtient $-e^{-x} \leqslant e^{-x}\cos x \leqslant e^{-x}$. Ainsi,

$$\text{pour tout réel positif } x,\ -e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}.$$

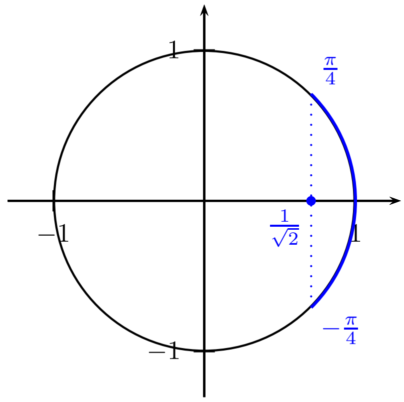
De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est aussi asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

4) a) La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\left(\left(-e^{-x}\right)\cos x + e^{-x}(-\sin x)\right) + \left(-e^{-x}\right) = (\cos x + \sin x - 1)\, e^{-x} \\ &= \left(\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) e^{-x} \text{ (d'après la partie A).} \end{aligned}$$

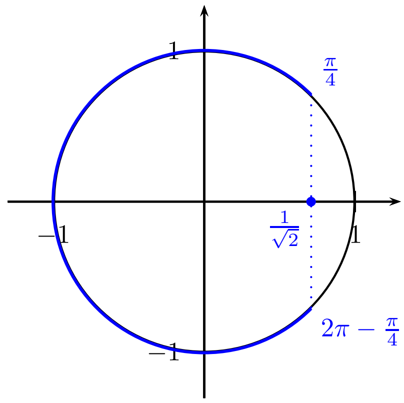
$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ h'(x) = e^{-x}\left(\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right).}$$

b) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors, $-\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Par suite, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$ puis $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$.

Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$. Alors, $\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Par suite, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$ puis $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.

c) Pour tout réel x de $[0, 2\pi]$, $e^{-x} > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0, 2\pi]$, $h'(x)$ est du signe de $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$. De'après la question précédente, la fonction h' est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

$h(0) = e^0 - e^0\cos(0) = 1 - 1 = 0$. $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,21$ arrondi au centième. Enfin, $h(2\pi) = e^{2\pi} - e^{2\pi}\cos(2\pi) = e^{2\pi} - e^{2\pi} = 0$.

On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	↗	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	↘	0

5) Les fonctions f et g sont continues sur $[0, 2\pi]$. D'autre part, pour tout réel x de $[0, 2\pi]$, $f(x) \leqslant g(x)$ d'après la question 2). Donc,

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^{2\pi} (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^{2\pi} h(x)\,dx = [H(x)]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\pi}(-2 + \cos(2\pi) - \sin(2\pi)) - \frac{1}{2}e^0(-2 + \cos(0) - \sin(0)) = -\frac{1}{2}e^{-2\pi} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 - e^{-2\pi}}{2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2}.}$$