France métropolitaine/Réunion septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2, 1, 0)$. La droite (AB) est la droite passant par $A(0, 1, -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2, 1, 0)$. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = -2s \\ y = 1 + s \\ z = -1 \end{array}\right., \ s \in \mathbb{R}.$$

2) a) La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}(-2, 1, 0)$ et la droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1, 1, -1)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB}$, la troisième coordonnée fournit $-1 = k \times 0$ ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires ou encore les droites $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles.

b) On en déduit que les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes ou non coplanaires.

Soit $M(-2 + t, 1 + t, -1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$ et $N(-2s, 1 + s, -1)$, $s \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB).

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2 + t = -2s \\ 1 + t = 1 + s \\ -1 - t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ -2s = -2 \\ 1 + s = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ s = 1 \\ s = 0 \end{array}\right..$$

Ce système d'équations n'a pas de solution ou encore les droites $\mathscr{D}$ et (AB) n'ont pas de point commun. Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont donc pas sécantes.

3) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur de coordonnées $(1, 1, -1)$. Ce vecteur normal est aussi un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$. Donc, la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. De plus,

$$x_M + y_M - z_M - 3u = (-2 + u) + (1 + u) - (-1 - u) - 3u = u(1 + 1 + 1 - 3) + (-2 + 1 + 1) = 0.$$

Donc, le plan $\mathscr{P}$ passe par le point M.

4) Soit $N(-2s, 1 + s, -1)$, $s \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB).

$$N \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (-2s) + (1 + s) - (-1) - 3u = 0 \Leftrightarrow -s + 2 - 3u = 0 \Leftrightarrow s = 2 - 3u.$$

Pour $s = 2 - 3u$, on obtient le point $N(-4 + 6u, 3 - 3u, -1)$.

5) a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $((-4 + 6u) - (-2 + u), (3 - 3u) - (1 + u), (-1) - (-1 - u))$ ou encore $(-2 + 5u, 2 - 4u, u)$. La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(1, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{v} = (-2 + 5u) + (2 - 4u) - u = 0.$$

Donc, la droite (MN) et la droite $\mathscr{D}$ sont orthogonales. De plus, les droites (MN) et $\mathscr{D}$ sont sécantes en M et finalement, la droite (MN) et la droite $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires.

b)

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{v} = (-2) \times (-2 + 5u) + 1 \times (2 - 4u) + 0 \times (-u) = 6 - 14ux.$$

Par suite, les droites (MN) et (AB) sont perpendiculaires si et seulement si $u = \dfrac{3}{7}$.

6) a)

$$\begin{aligned} MN^2 &= (-2 + 5u)^2 + (2 - 4u)^2 + (-u)^2 = 25u^2 - 20u + 4 + 16u^2 - 16u + 4 + u^2 \\ &= 42u^2 - 36u + 8. \end{aligned}$$

b) Pour $u \in \mathbb{R}$, posons $f(u) = 42u^2 - 36u + 8$. On sait que $f(u)$ est minimal si et seulement si $f'(u) = 0$ avec $f'(u) = 84u - 36$. Donc, MN^2 est minimal pour $u = \dfrac{36}{84}$ ou encore $u = \dfrac{3}{7}$.

Enfin, MN est minimal si et seulement si MN^2 est minimal. Donc, MN est minimal pour $u = \dfrac{3}{7}$ ce qui correspons à la situation où les droites (MN) et (AB) sont perpendiculaires.

