

EXERCICE 2 (7 points) (commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

La courbe \mathcal{C} est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^n f(x) dx$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

1) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2) On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$.

b) Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ telle que :

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H .

c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq 2$.

3) Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont

- K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
- A , x et h des réels.

| | |
|----------------|---|
| Entrée | Saisir K entier naturel non nul |
| Initialisation | Affecter à A la valeur 0 Affecter à x la valeur 0 Affecter à h la valeur $\frac{1}{K}$ |
| Traitement | Pour i variant de 1 à K Affecter à A la valeur $A + h \times f(x)$ Affecter à x la valeur $x + h$ Fin Pour |
| Sortie | Afficher A |

1) Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$.
Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

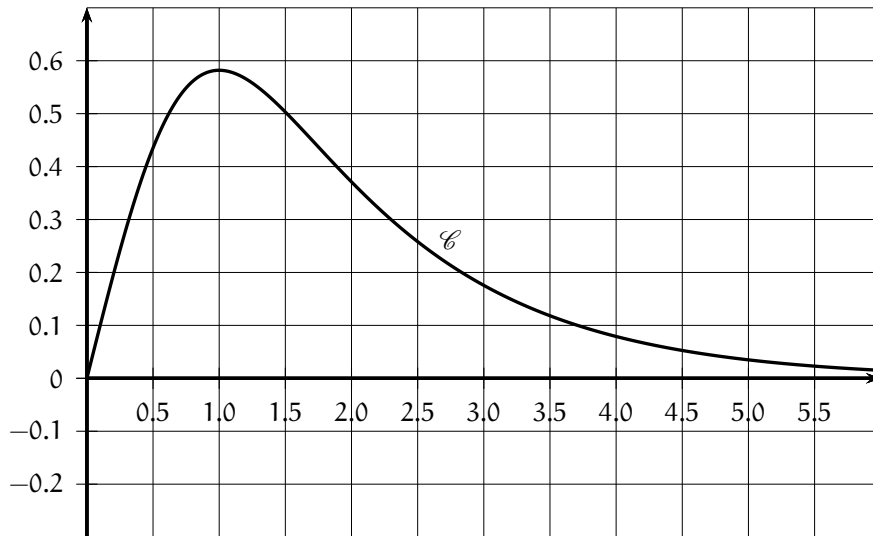
| i | A | x |
|-----|-----|-----|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

2) En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.

3) Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

Annexe, Exercice 2

Courbe \mathcal{C} , représentative de la fonction f sur $[0, 6]$.



Courbe \mathcal{C} , représentative de la fonction f sur $[0, 1]$

