France métropolitaine/Réunion septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) Soit n un entier naturel. D'après la relation de Chasles

$$I_{n+1} = \int_0^{n+1} f(x)\ dx = \int_0^n f(x)\ dx + \int_n^{n+1} f(x)\ dx = I_n + \int_n^{n+1} f(x)\ dx,$$

et donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x)\ dx.$$

Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et donc sur $[n, n+1]$, par positivité de l'intégrale, $\int_n^{n+1} f(x)\ dx \geqslant 0$ ou encore $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$ ou encore $I_{n+1} \geqslant I_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

2) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, n]$, $e^x - x \geqslant \dfrac{e^x}{2} > 0$ puis $\dfrac{1}{e^x - x} \leqslant \dfrac{2}{e^x}$ par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$. En multipliant les deux membres de la dernière inégalité pat le réel positif x, on obtient $\dfrac{x}{e^x - x} \leqslant \dfrac{2x}{e^x}$ ou encore $f(x) \leqslant 2xe^{-x}$. Ainsi, pour tout réel x de $[0, n]$, $f(x) \leqslant 2xe^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$I_n = \int_0^n f(x)\ dx \leqslant \int_0^n 2xe^{-x}\ dx.$$

b) La fonction H est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x,

$$H'(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x-1) \times \left(-e^{-x}\right) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

c) Ainsi, la fonction $2H$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2xe^{x}$ sur $[0, +\infty[$.

Soit n un entier naturel.

$$\int_0^n 2xe^{-x}\ dx = [2H(x)]_0^n = 2(-n-1)e^{-x} - 2(0-1)e^0 = 2 - 2(n+1)e^{-n}.$$

D'après la question 2)a),

$$I_n \leqslant 2 - 2(n+1)e^{-n} \leqslant 2,$$

car $(n+1)e^{-x} \geqslant 0$.

3) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après la question 1) et est majorée par 2 d'après la question 2)c). On en déduit que

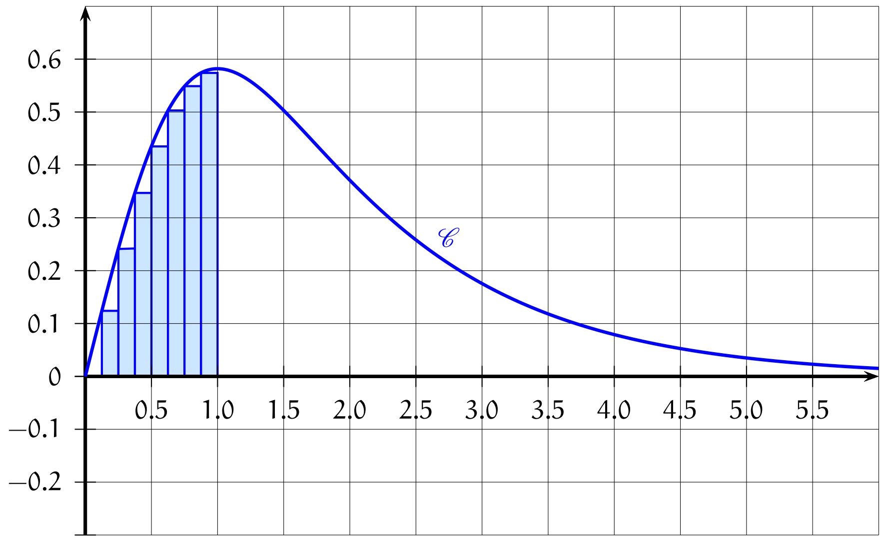
$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

Partie B

1) Valeurs successives de A

i	A	x
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

2) La dernière valeur de A affichée par l'algorithme est la somme des aires des rectangles ci-dessous



3) L'algortihtme fournit une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ obtenue par la méthode des rectangles avec un pas de $\dfrac{1}{K}$. Quand K devient très grand, l'alorithme affiche une très bonne valeur approchée de cette intégrale ou encore une très bonne valeur approchée de l'aire ci-dessous :