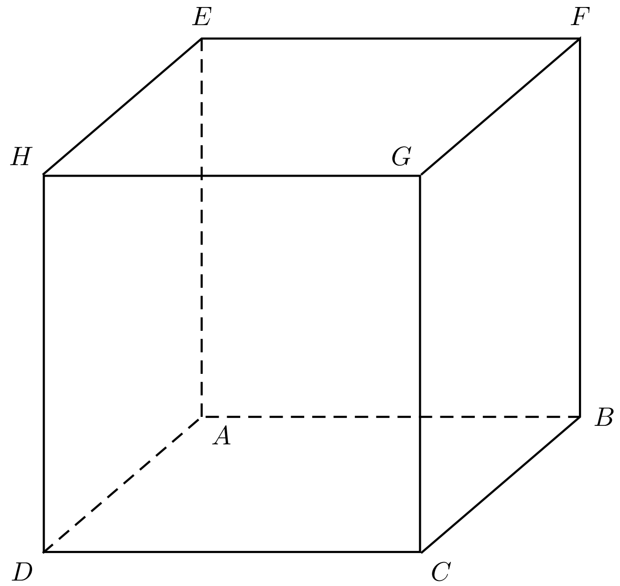
Antilles Guyane septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{où } s \text{ décrit l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels.}$$

b) Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées (t, t, t) où t est un réel.

2) Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).
Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3) Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s, 1-s, 0)$ un point de la droite (DB) et $N(t, t, t)$ un point de la droite (AG).

a) Montrer que $MN^2 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

b) En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.
Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas ?

