

EXERCICE 3 : corrigé

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\ln(u_{n+1}) &= \ln(u_n) - 1 \Rightarrow e^{\ln(u_{n+1})} = e^{\ln(u_n) - 1} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{e^{\ln(u_n)}}{e^1} \\ &\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{e} \times u_n.\end{aligned}$$

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \frac{1}{n+1}$. Pour tout entier naturel n , $v_n \leq 1$. Donc, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite majorée.

D'autre part, pour tout entier naturel n ,

$$w_n = 1 - \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 + \ln(n+1).$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$ et en particulier que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

On a fourni un exemple de suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à terme réels strictement positifs et majorée telle que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas majorée. La proposition ($\mathcal{P}$) est donc fausse.

$$3) \bullet \left| \frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}}{4} \right| = \frac{1}{4} |\sqrt{2} + i\sqrt{6}| = \frac{1}{4} \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\bullet |z_0| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|z_{n+1}| = \left| \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}}{4} \right) z_n \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}}{4} \right| |z_n| = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_n|.$$

Donc, la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$|z_n| = |z_0| \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = \frac{\sqrt{13}}{(\sqrt{2})^n}.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}|z_n| \leq 10^{-20} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{(\sqrt{2})^n} \leq \frac{1}{10^{20}} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \geq \sqrt{13} \times 10^{20} \\ &\Leftrightarrow \ln\left((\sqrt{2})^n\right) \geq \ln(\sqrt{13} \times 10^{20}) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{2} \ln(2) \geq \frac{\ln(13)}{2} + 20 \ln(10) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(13) + 40 \ln(10)}{\ln(2)} \quad (\text{car } \ln(2) > 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 136,5 \dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 137 \quad (\text{car } n \text{ est un entier}).\end{aligned}$$

Les entiers naturels n tels que $|z_n|$ soit inférieur ou égal à 10^{-20} sont les entiers supérieurs ou égaux à 137.