

Antilles Guyane septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Partie A : étude de la fonction f_1

1) La fonction f_1 est définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.

On admet que f_1 est dérivable sur \mathbb{R} et on note f_1' sa dérivée.

a) Justifier que pour tout réel x , $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.

b) Etudier les variations de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .

c) Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.

d) Vérifier que pour tout réel x , $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

2) En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par

$$F_1(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right).$$

En déduire la valeur exacte de I_1 .

Partie B : étude de la suite (I_n)

1) Soit n un entier naturel non nul.

a) Interpréter graphiquement la quantité I_n .

b) Emettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n) .
Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

2) a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

c) Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n) .

3) Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0, 1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}.$$

b) En déduire un encadrement de la suite (I_n) , puis sa limite.