

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A : étude de la fonction f_1

1) a) f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f_1'(x) = 2x \times e^{-2x} + x^2 \times (-2e^{-2x}) = (2x - 2x^2) e^{-2x} = 2xe^{-2x}(1 - x).$$

b) Pour tout réel x , $2e^{-2x} > 0$. Donc, pour tout réel x , $f_1'(x)$ est du signe de $x(1 - x)$. $x(1 - x)$ est un trinôme du second degré qui admet deux racines réelles distinctes à savoir $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré nous permet de dresser le tableau de variations de la fonction f_1 :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	$+$	$-$
f_1	$+\infty$	0	e^{-2}	0

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty.$$

d) Pour tout réel x ,

$$f_1(x) = x^2 e^{-2x} = \frac{x^2}{e^{2x}} = \frac{x^2}{(e^x)^2} = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0^2 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0.$$

$$2) I_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \left[-e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right]_0^1 = -e^{-2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + e^0 \left(0 + 0 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-2}.$$

$$I_1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-2}.$$

Partie B : étude de la suite (I_n)

1) a) Soit n un entier naturel non nul. La fonction f_n est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc, I_n est l'aire exprimée en unités d'aire du domaine du plan compris entre l'axe (Ox) et la courbe $\mathcal{C}_n$ d'une part et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

b) Les tracés des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ à la calculatrice suggèrent que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) = x^2 e^{-2(n+1)x} = x^2 e^{-2nx-2x} = x^2 e^{-2nx} \times e^{-2x} = e^{-2x} f_n(x).$$

b) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $-2x \leq 0$ et donc $e^{-2x} \leq 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif $f_n(x)$, on obtient $e^{-2x} f_n(x) \leq f_n(x)$ ou encore $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

c) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$ ou encore que $I_{n+1} \leq I_n$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n , $I_{n+1} \leq I_n$ et donc

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$. En multipliant les trois membres de cet encadrement par le réel positif e^{-2nx} , on obtient $0 \leq x^2 e^{-2nx} \leq e^{-2nx}$ ou encore $0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}$.

b) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-2nx} dx$ avec

$$\int_0^1 e^{-2nx} dx = \left[-\frac{1}{2n} e^{-2nx} \right]_0^1 = -\frac{e^{-2n}}{2n} + \frac{e^0}{2n} = \frac{1 - e^{-2n}}{2n}.$$

Pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq I_n \leq \frac{1 - e^{-2n}}{2n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-2n} = 1$. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$. En divisant, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2n}}{2n} = 0.$$

Mais alors, l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes fournissent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$