Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$u(x)=\ln(x)+x-3.$$

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2) Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y=\ln(x)$.

1) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$, $f(x)-\ln(x)=\dfrac{2-\ln(x)}{x}$.
En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2) On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$H(x)=\frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.
Calculer $I=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{2-\ln x}{x}\,dx$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

