Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a)

• $x_0 = -3$ et $y_0 = 4$. Donc, $A_0(-3;4)$.
• $x_1 = 0,8x_0 - 0,6y_0 = 0,8(-3) - 0,6(4) = -4,8$ et $y_1 = 0,6x_0 + 0,8y_0 = 0,6(-3) + 0,8(4) = 1,4$. Donc $A_1(-4,8;1,4)$.
• $x_2 = 0,8x_1 - 0,6y_1 = 0,8(-4,8) - 0,6(1,4) = -4,68$ et $y_2 = 0,6x_1 + 0,8y_1 = 0,6(-4,8) + 0,8(1,4) =$. Donc $A_2(-4,68;-1,76)$.

b) Algorithme complété.

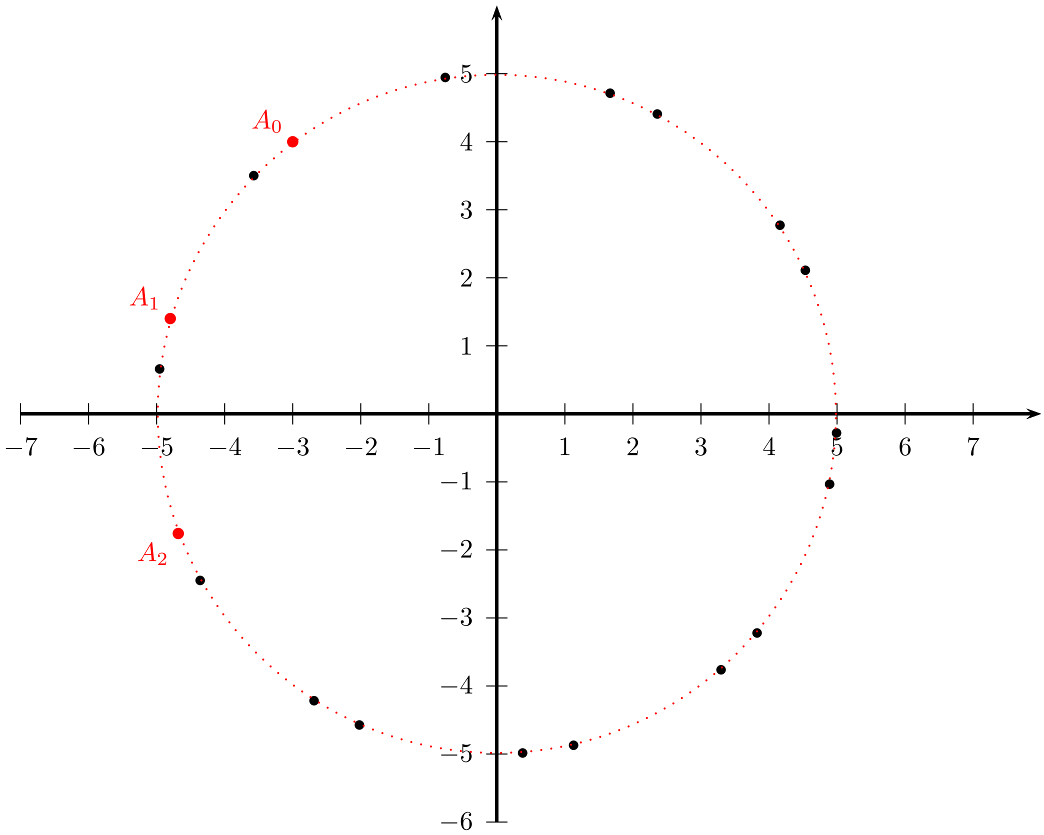
```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
        Construire le point de coordonnées (x, y)
        t prend la valeur x
        x prend la valeur 0,8 × t − 0,6 × y.
        y prend la valeur 0,6 × t + 0,8 × y.
Fin Pour
```

Remarque. L'algorithme calcule les coordonnées des points A_0, ..., A_{21}.

c) Graphique.



Il semble que tous les points A_n soient sur le cercle de centre O et de rayon 5.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $|z_n| = 5$.

• $z_0 = -3 + 4i$ et donc $|z_0| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\|z_n| = 5$.

$$\begin{aligned}|z_{n+1}| &= \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} = \sqrt{(0,8x_n - 0,6y_n)^2 + (0,6x_n + 0,8y_n)^2} \\ &= \sqrt{0,64x_n^2 - 2\times 0,8\times 0,6x_n + 0,36y_n^2 + 0,36x_n^2 + 2\times 0,8\times 0,6x_n + 0,64y_n^2} \\ &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n| \\ &= 5 \text{ (par hypothèse de récurrence.)}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $|z_n| = 5$ et donc que tous les points A_n soient sur le cercle de centre O et de rayon 5.

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}e^{i\theta}z_n &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x_n + iy_n) = (0,8 + 0,6i)(x_n + iy_n) \\ &= 0,8x_n + 0,8iy_n + 0,6ix_n - 0,6y_n = (0,8x_n - 0,6y_n) + i(0,6x_n + 0,8y_n) \\ &= x_{n+1} + iy_{n+1} = z_{n+1}.\end{aligned}$$

c) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $q = e^{i\theta}$. On sait que pour tout entier naturel n,

$$z_n = z_0 \times q^n = z_0\left(e^{i\theta}\right)^n = z_0e^{in\theta}.$$

d) Soit α un argument du nombre complexe $z_0 = -3 + 4i$. On a $|z_0| = 5$ puis

$$z_0 = 5\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = 5(-0,6 + 0,8i) = 5(-\sin(\theta) + i\cos(\theta)) = 5\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

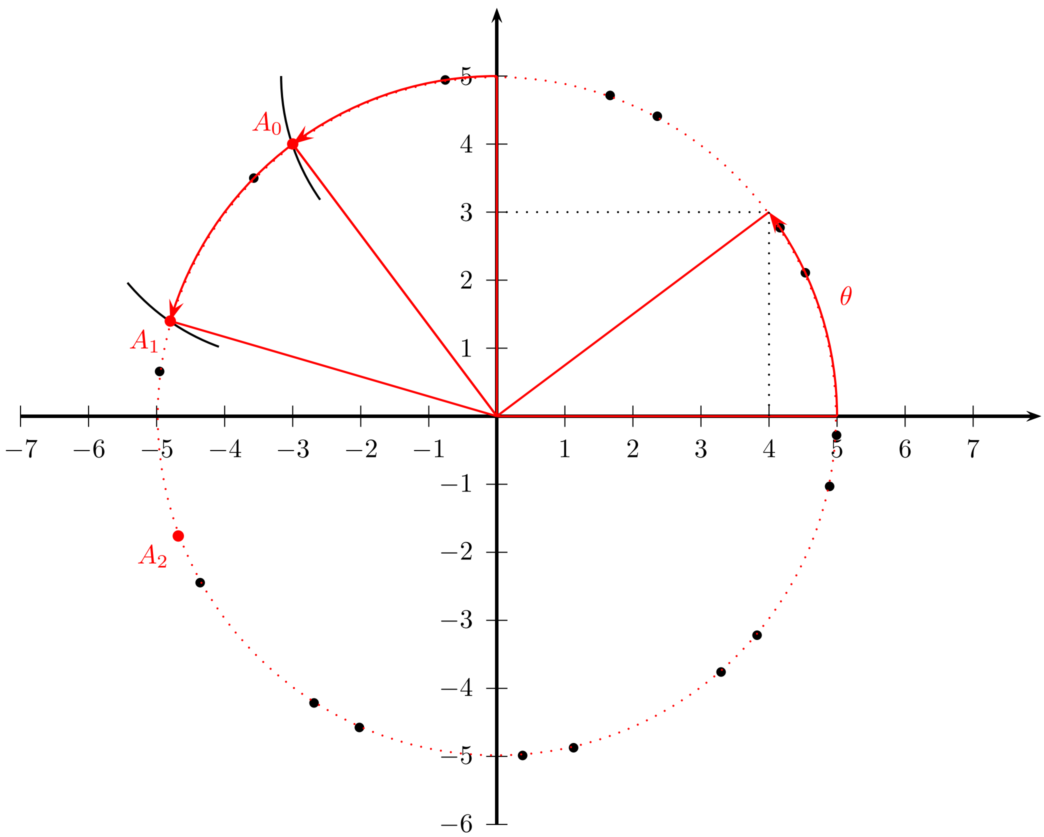
Ceci montre qu'un argument de z_0 est $\theta + \dfrac{\pi}{2}$.

e) D'après les questions c) et d), pour tout entier naturel n,

$$z_n = z_0e^{in\theta} = 5e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}e^{in\theta} = 5e^{i\left(n\theta + \theta + \frac{\pi}{2}\right)} = 5e^{i\left((n+1)\theta + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Pour tout entier naturel n, un argument de z_n est $(n+1)\theta + \dfrac{\pi}{2}$ (et le module de z_n est 5).

$5\cos(\theta) = 5\times 0,8 = 4$ et $5\sin\theta = 5\times 0,6 = 3$. Donc, θ est un argument de $4 + 3i$.



Pour tout entier naturel n, A_{n+1} est obtenu en faisant tourner A_n autour de O d'un angle de mesure θ dans le sens direct.

