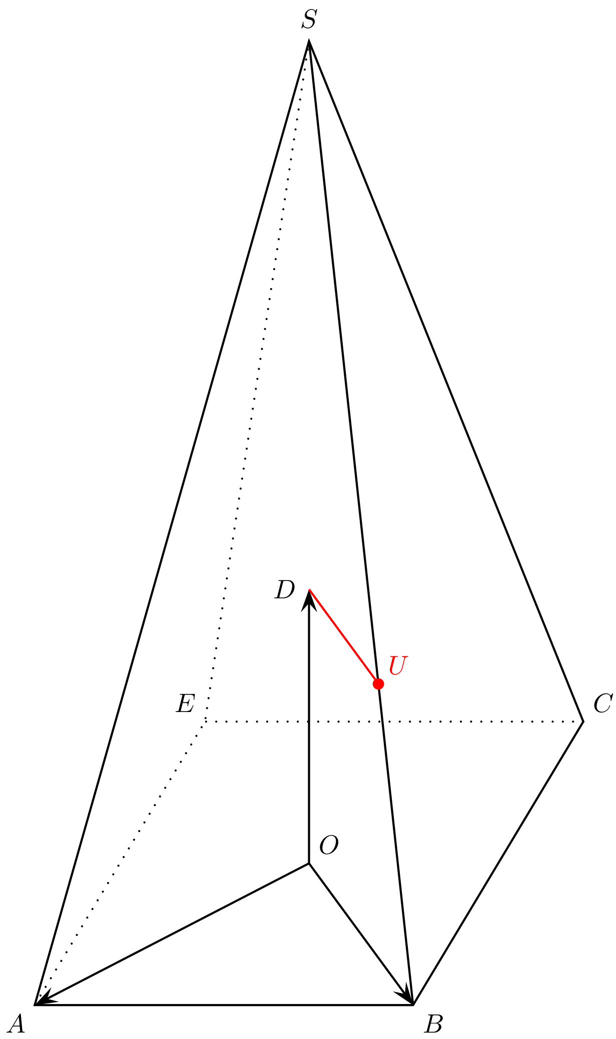
Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

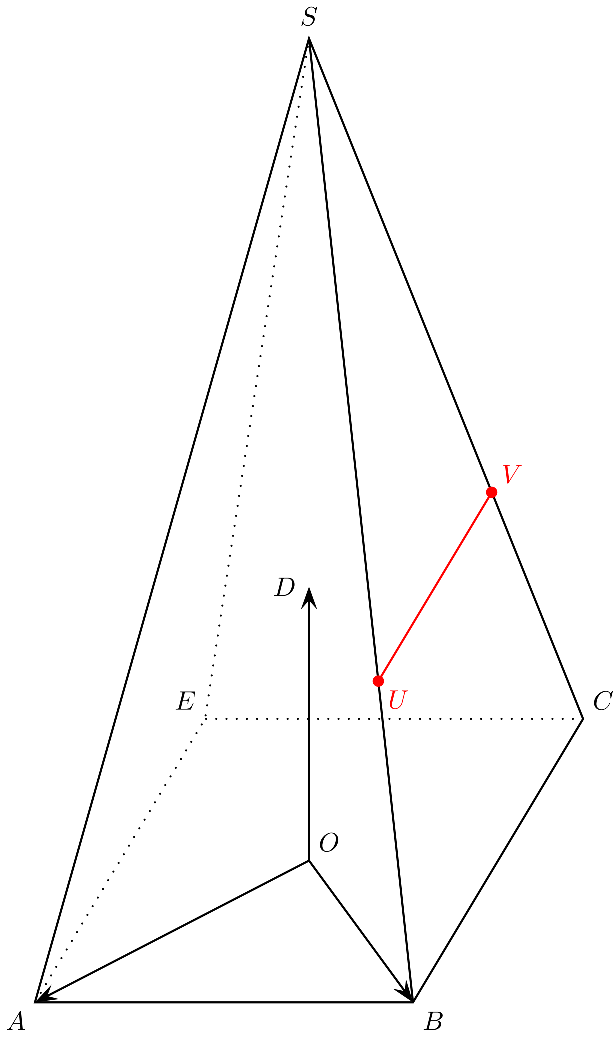
Partie A

1) Le point U est le point d'intersection de la parallèle à la droite (OB) passant par D et de la droite (SB).



2) Les points A et E ne sont pas dans le plan (BCS) et le point U est dans le plan (BCS) (car sur la droite (BS)). Donc, le plan (AEU) et le plan (BCS) sont sécants en une droite Δ passant par U. Le point V est un autre point commun aux plans (AEU) et (BCS) (car sur la droite (SC)). Donc, le point V est un autre point de Δ. On en déduit que la droite Δ est la droite (UV).

La droite (AE) est une droite du plan (AEU) et la droite (BC) est une droite du plan (BCS). Puisque les droites (AE) et (BC) sont parallèles et que les plans (AEU) et (BCS) sont sécants en la droite (UV), le théorème du toit permet d'affirmer que la droite (UV) est parallèle à la droite (BC).



3) Le point A a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. D'autre part, le point E est le symétrique du point B par rapport à O et le point B a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. Donc le point E a pour coordonnées $(0, -1, 0)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(-1, -1, 0)$. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}, 0\right)$. On en déduit que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AE}$ et donc que le point K appartient à la droite (AE).

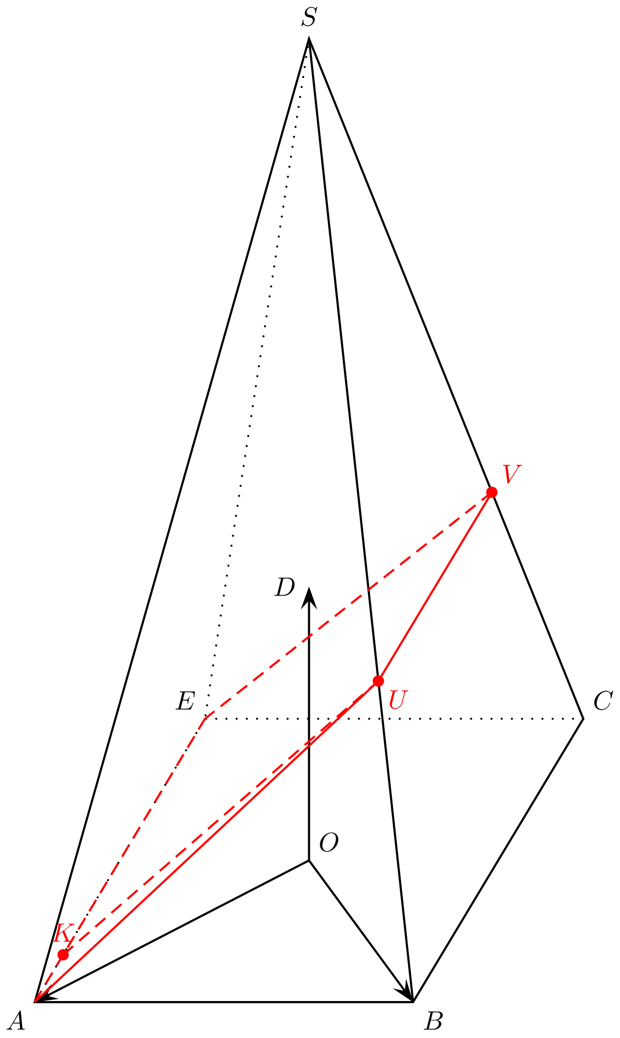
Déterminons les coordonnées du point U. Le point U est le point de la droite (SB) de côte 1. La droite (SB) est la droite passant par $S\,(0, 0, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{BS}\,(0, -1, 3)$. Un système d'équations paramétriques de le droite (SB) est $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -t \\ z = 3 + 3t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. La côte du point de coordonnées $(0, -t, 3 + 3t)$ est égale à 1 si et seulement si $3t + 3 = 1$ ou encore $t = -\dfrac{2}{3}$. Pour $t = -\dfrac{2}{3}$, on obtient les coordonnées du point U :

$$U\left(0, \frac{2}{3}, 1\right).$$

Vérifions enfin que le vecteur $\overrightarrow{UK}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AE}$. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(-1, -1, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{UK}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{6} - 0, -\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3}, -1\right)$ ou encore $\left(\dfrac{5}{6}, -\dfrac{5}{6}, -1\right)$. Par suite,

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{UK} = (-1) \times \frac{5}{6} + (-1) \times \left(-\frac{5}{6}\right) + 0 \times (-1) = -\frac{5}{6} + \frac{5}{6} = 0.$$

On a montré que le point K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.



Partie B

1) Les points A, E et U ne sont pas alignés. Ils définissent donc un unique plan.

• $3x_E - 3y_E + 5z_E - 3 = 3 \times 0 - 3 \times (-1) + 5 \times 0 - 3 = 3 - 3 = 0$. Donc le point E appartient au plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.
• $3x_A - 3y_A + 5z_A - 3 = 3 \times 1 - 3 \times 0 + 5 \times 0 - 3 = 3 - 3 = 0$. Donc le point A appartient au plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.
• $3x_U - 3y_U + 5z_U - 3 = 3 \times 0 - 3 \times \dfrac{2}{3} + 5 \times 1 - 3 = -2 + 5 - 3 = 0$. Donc le point U appartient au plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

Ceci montre que le plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$ est le plan (AEU) ou encore que le plan (AEU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

2) Un vecteur normal au plan (EAU) est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3, -3, 5)$. La droite (d) est la droite passant par $S(0, 0, 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3, -3, 5)$. Un système d'équations paramétriques de (d) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

3) Soit $M(3t, -3t, 3 + 5t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (d).

$$\begin{aligned} M \in (EAU) &\Leftrightarrow 3(3t) - 3(-3t) + 5(3 + 5t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 43t + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{12}{43}. \end{aligned}$$

Quand $t = -\dfrac{12}{43}$, on obtient les coordonnées du point H : $\left(-\dfrac{36}{43}, \dfrac{36}{43}, \dfrac{69}{43}\right)$.

4) H est le projeté orthogonal de S sur le plan (EAU).

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{\left(0+\frac{36}{43}\right)^2 + \left(0-\frac{36}{43}\right)^2 + \left(3-\frac{69}{43}\right)^2} = \frac{1}{43}\sqrt{36^2+36^2+60^2} = \frac{1}{43}\sqrt{12^2\left(3^2+3^2+5^2\right)} \\ &= \frac{12\sqrt{43}}{43}. \end{aligned}$$

Le volume de la pyramide $SAUEV$ est

$$\mathscr{V}_1 = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{43}}{18} \times \frac{12\sqrt{43}}{43} = \frac{5\times 2}{3\times 3} = \frac{10}{9}.$$

Déterminons le volume de la pyramide $SABCE$. Une diagonale du carré $ABCE$ a pour longueur 2 et donc le côté du carré $ABCE$ a pour longueur $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. L'aire du carré $ABCE$ est donc $\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2$ puis le volume de la pyramide $SABCE$ est

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2.$$

Le volume du solide $AUVEBC$ est donc $2 - \dfrac{10}{9} = \dfrac{8}{9}$. Le plan (AEU) ne partage donc pas la pyramide $SABCE$ en deux solides de même volume.

