Pondichéry 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) a) Puisque $\dfrac{64+104}{2} = 84 = \mu$, les deux nombres 64 et 104 sont symétriques par rapport à μ. On en déduit que

$$P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - P(X \leqslant 64) - P(X \geqslant 104) = 1 - 2P(X \leqslant 64) = 1 - 2 \times 0,16 = 0,68.$$

$$\boxed{P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 0,68.}$$

b) D'après le cours, $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$. On peut donc proposer $\sigma = \mu - 64 = 20$.

$$\boxed{\sigma = 20 \text{ à 1 près.}}$$

2) a) On sait que la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

b) $X \leqslant 64 \Leftrightarrow X - 84 \leqslant -20 \Leftrightarrow \dfrac{X-84}{\sigma} \leqslant -\dfrac{20}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}$. Les événements $X \leqslant 64$ et $Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}$ se produisent simultanément. Donc

$$P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant -\frac{20}{\sigma}\right).$$

c) La calculatrice fournit

$$P(X \leqslant 64) = 0,16 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant -\frac{20}{\sigma}\right) = 0,16 \Leftrightarrow -\frac{20}{\sigma} = -0,9944\ldots \Leftrightarrow \sigma = \frac{20}{0,9944\ldots}$$
$$\Leftrightarrow \sigma = 20,1114\ldots$$

$$\boxed{\sigma = 20,111 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

3) a) La probabilité demandée est $P(24 \leqslant X \leqslant 60)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(24 \leqslant X \leqslant 60) = 0,115 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

b) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 120)$ ou encore $1 - P(X \leqslant 120)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(X \leqslant 120) = 0,037 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

Partie B

1) a) Notons Y la variable aléatoire égale au nombre de clients faisant jouer l'extension de garantie. La variable Y suit une loi binomiale. En effet,

- 12 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux éventualités à savoir « le client fait jouer l'extension de garantie » avec une probabilité $p = 0,115$ et « le client ne fait pas jouer l'extension de garantie » avec une probabilité $1 - p = 0,885$.

La variable Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,115$.

La probabilité demandée est $P(Y = 3)$. La calculatrice fournit

$$P(Y = 3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times 0,885^9 = 0,111 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

b) La probabilité demandée est $P(Y \geqslant 6)$. La calculatrice fournit

$$P(Y \geqslant 6) = 1 - P(Y \leqslant 5) = 0,001 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) Dans cette question, Y désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

a) La variable Y prend deux valeurs : 65 euros si la panne est réparable et $65 - 399 = -334$ euros si la panne est irréparable. La loi de probabilité de Y est

$$P(Y = -334) = 0,115 \quad \text{et} \quad P(Y = 65) = 0,885.$$

b) L'espérance de la variable Y est

$$E(Y) = 0,115 \times (-334) + 0,885 \times 65 = 19,115.$$

L'entreprise gagne donc en moyenne $19,115$ euros par client ayant pris l'extension de garantie. Puisque cette espérance est strictement positive, cette offre d'extension de garantie est financièrement avantageuse pour l'entreprise.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.