

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a) - b}{1-a} = au_n + \frac{b - ab - b}{1-a} \\ &= au_n - \frac{ab}{1-a} = a \left(u_n - \frac{b}{1-a} \right) \\ &= av_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

2) Si $a \in]-1, 1[$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{1-a} + v_n \right) = \frac{b}{1-a}$.

Partie B

1) Quand Max rentre chez lui, il enlève à la plante le quart de sa hauteur. La plante ne mesure plus que $80 - \frac{1}{4} \times 80 = 60$ cm. Entre mars 2015 et mars 2016, la plante pousse de 30 cm. En mars 2016, la plante mesure donc $60 + 30 = 90$ cm.

En mars 2016, la plante mesure 90 cm.

2) a) En mars de l'année $2015 + n$, la plante a une hauteur de h_n cm. Max enlève alors à la plante le quart de sa hauteur. Celle-ci ne mesure plus que $h_n - \frac{h_n}{4} = \frac{3h_n}{4} = 0,75h_n$. Puis, entre mars de l'année $2015 + n$ et mars de l'année $2015 + n + 1$, la plante pousse de 30 cm. En mars $2015 + n + 1$, sa hauteur en cm est donc

$$h_{n+1} = 0,75h_n + 30.$$

b) La calculatrice fournit $h_0 = 80, h_1 = 90, h_2 = 97,5, h_3 = 103,125$. Il semblerait que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit strictement croissante.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $h_{n+1} - h_n > 0$.

- $h_1 - h_0 = 10 > 0$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $h_{n+1} - h_n > 0$ et montrons que $h_{n+2} - h_{n+1} > 0$.

$$\begin{aligned} h_{n+2} - h_{n+1} &= (0,75h_{n+1} + 30) - (0,75h_n + 30) = 0,75h_{n+1} - 0,75h_n \\ &= 0,75(h_{n+1} - h_n) > 0 \text{ (par hypothèse de récurrence)}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $h_{n+1} - h_n > 0$ ou encore que pour tout entier naturel n , $h_{n+1} > h_n$. La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

c) On applique la partie A avec $a = 0,75$ et $b = 30$. $a \in]-1, 1[$ et donc la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \frac{30}{1 - 0,75} = 120.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 120.$$