Pondichéry 2015. Enseignement spécifique

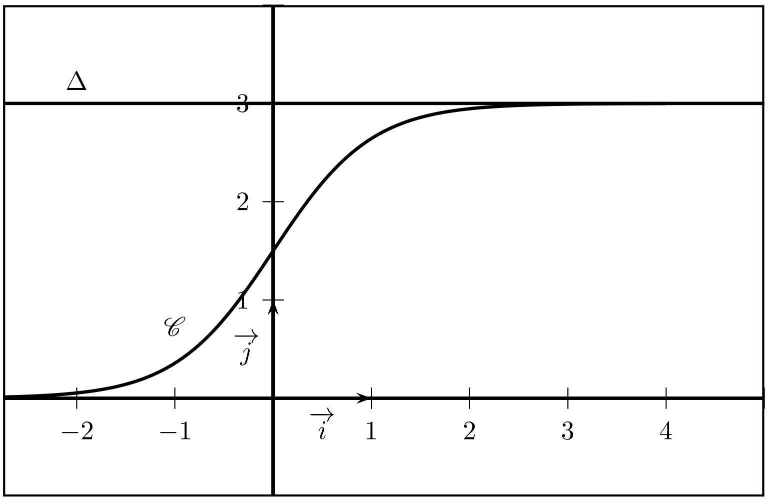
EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1) Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2) On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.
Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3) Soit a un réel strictement positif.

a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,dx$.

b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.

c) On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan défini par $\left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{array}\right.$.
Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

