Pondichéry 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Pour tout réel x, $1+e^{-2x}>1$. En particulier, pour tout réel x, $1+e^{-2x}\neq 0$. Par suite, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f'(x)=3\times -\frac{\left(1+e^{-2x}\right)'}{\left(1+e^{-2x}\right)^2}=-3\times\frac{(-2x)'e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2}=-3\times\frac{-2e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2}=\frac{6e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2}.$$

Pour tout réel x, $\dfrac{6e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2}>0$. Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3}{1+0}=3$. On en déduit que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(x)=2,999 &\Leftrightarrow \frac{3}{1+e^{-2x}}=2,999\Leftrightarrow 1+e^{-2x}=\frac{3}{2,999}\Leftrightarrow e^{-2x}=\frac{3}{2,999}-1\\ &\Leftrightarrow e^{-2x}=\frac{0,001}{2,999}\Leftrightarrow -2x=\ln\left(\frac{0,001}{2,999}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{0,001}{2,999}\right)\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2,999}{0,001}\right)\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(2999).\end{aligned}$$

Donc, l'équation $f(x)=2,999$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ à savoir $\alpha=\dfrac{1}{2}\ln(2999)$. La calculatrice fournit $\alpha=4,00301\ldots$ et en particulier

$$\boxed{4<\alpha<4,01.}$$

Partie B

1) D'après la partie A, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$. Par suite, pour tout réel x, $f(x)<3$ ou encore, pour tout réel x, $h(x)>0$.

2) Puisque pour tout réel x, $1+e^{-2x}>0$, la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$H'(x)=-\frac{3}{2}\times\frac{\left(1+e^{-2x}\right)'}{1+e^{-2x}}=-\frac{3}{2}\times\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

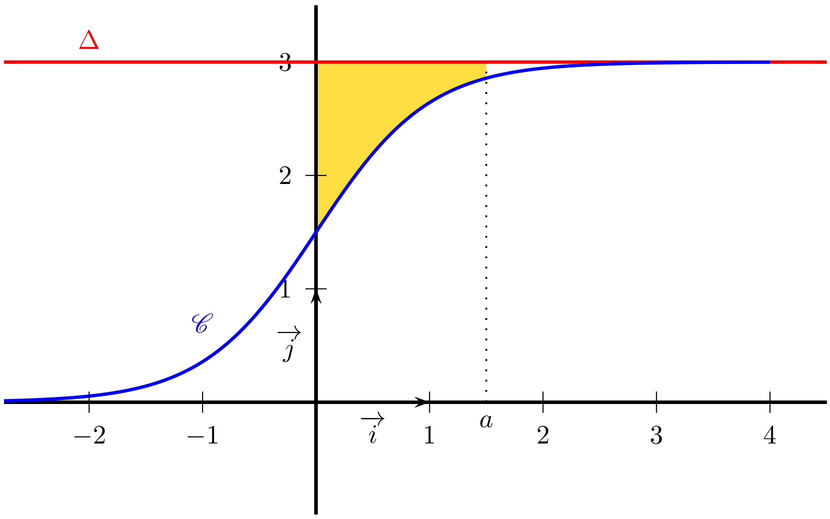
D'autre part, pour tout réel x,

$$h(x)=3-\frac{3}{1+e^{-2x}}=\frac{3+3e^{-2x}-3}{1+e^{-2x}}=\frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=H'(x).$$

Ceci montre que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

3) Soit a un réel strictement positif.

a) La fonction f est continue sur le segment $[0,a]$ et pour tout réel x de $[0,a]$, $f(x)\leqslant 3$. Par suite, $\displaystyle\int_0^a h(x)\,dx=\int_0^a (3-f(x))\,dx$ est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ d'une part, les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=a$ d'autre part.



b) $\displaystyle\int_0^a h(x)\,dx = [H(x)]_0^a = \left(-\frac{3}{2}\ln\left(1+e^{-2a}\right)\right) - \left(-\frac{3}{2}\ln\left(1+e^{0}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\ln(2) - \ln\left(1+e^{-2a}\right)\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.

c) L'aire demandée est $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a h(x)\,dx$. Or, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} e^{-2a} = 0$ et donc

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a h(x)\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+0}\right) = \frac{3\ln(2)}{2}.$$

L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ est égale à $\dfrac{3\ln(2)}{2}$.

