

Polynésie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 est $f'(1)$. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 est horizontale si et seulement si $f'(1) = 0$.

La fonction f est dérivable sur $[1, 8]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[1, 8]$ et pour tout réel x de $[1, 8]$,

$$f'(x) = a \times e^{-x} + (ax + b) \times (-e^{-x}) = (a - (ax + b))e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}.$$

Par suite,

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow (-a + a - b)e^{-1} = 0 \Leftrightarrow -be^{-1} = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

$$\boxed{b = 0.}$$

2) Pour tout réel x de $[1, 8]$, $f(x) = axe^{-x}$. La condition de l'énoncé s'écrit $3,5 \leq f(1) \leq 4$ avec $f(1) = ae^{-1} = \frac{a}{e}$.

$$\begin{aligned} 3,5 \leq f(1) \leq 4a &\Leftrightarrow 3,5 \leq \frac{a}{e} \leq 4 \Leftrightarrow 3,5e \leq a \leq 4e \text{ (car } e > 0) \\ &\Leftrightarrow 9,5 \dots \leq a \leq 10,8 \dots \\ &\Leftrightarrow a = 10 \text{ (car } a \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

$$\boxed{a = 10.}$$

Partie B

1) La fonction g est dérivable sur $[1, 8]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[1, 8]$ et pour tout réel x de $[1, 8]$,

$$g'(x) = 10 [(-1) \times e^{-x} + (-x - 1) \times (-e^{-x})] = 10 (-e^{-x} + (x + 1)e^{-x}) = 10xe^{-x} = f(x).$$

La fonction g est donc une primitive de la fonction f sur $[1, 8]$.

2) L'unité d'aire est le mètre carré. Puisque la fonction f est continue et positive sur $[1, 8]$, l'aire du mur de soutènement exprimée en mètre carré est

$$\mathcal{A} = \int_1^8 f(x) dx = [g(x)]_1^8 = 10 ((-8 - 1)e^{-8}) - 10(-1 - 1)e^{-1} = 20e^{-1} - 90e^{-8}.$$

Le prix total en euros à payer est

$$300 + 50 (20e^{-1} - 90e^{-8}) = 300 + 1000e^{-1} - 4500e^{-8} = 666,3 \dots$$

Le devis de l'artiste sera de 670 euros.

Partie C

1) La fonction f' est dérivable sur $[1, 8]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[1, 8]$ et pour tout réel x de $[1, 8]$,

$$(f')'(x) = 10 ((-1)e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x})) = 10(-1 - 1 + x)e^{-x} = 10(x - 2)e^{-x}.$$

Pour tout réel x de $[1, 8]$, $10e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x de $[1, 8]$, $(f')'(x)$ est du signe de $x - 2$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f' .

x	1	2	8
$(f')'(x)$	-	0	+
f'	0	$-10e^{-2}$	$-70e^{-8}$

2) $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en M . Cette tangente est la droite ML . Donc, $|f'(x)|$ est la valeur absolue du coefficient directeur de la droite (ML) à savoir $\frac{PM}{PL}$.

D'autre part, dans le triangle MPL , rectangle en P , on a $\tan(\alpha) = \frac{PM}{PL}$. Finalement

$$\tan(\alpha) = |f'(x)|.$$

3) Pour tout réel x de $[1, 8]$, $1 - x \leq 0$ puis $10(1 - x)e^{-x} \leq 0$ ou encore $f'(x) \leq 0$. Donc, pour tout réel x de $[1, 8]$, $|f'(x)| = -f'(x)$. D'après la question C-1), le tableau de variation de la fonction $|f'|$ est

x	1	2	8
f'	0	$10e^{-2}$	$70e^{-8}$

Le maximum de $|f'(x)|$ est $10e^{-2}$ ou encore la valeur maximale de $\tan(\alpha)$ est $10e^{-2}$ ce qui correspond à un angle de $53,5\dots^\circ$.

La valeur maximale de α reste inférieure à 55° et donc le toboggan est conforme aux contraintes imposées.