Nouvelle Calédonie novembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1) Calculer d_1 et a_1.

2) On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n $\quad D$ prend la valeur $\dfrac{D}{2} + 100$ $\quad A$ prend la valeur $\dfrac{A}{2} + \dfrac{D}{2} + 70$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1)** ?

b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3) a) Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4) On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geqslant n^2$.

c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$.

d) Étudier la convergence de la suite (a_n).

