

EXERCICE 2 : corrigé

1) Soit a un réel. La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'_a(x) = e^{x-a} - 2.$$

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f'_a(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 2 \\ &\Leftrightarrow x - a > \ln 2 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x > a + \ln 2, \end{aligned}$$

et de même, $f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = a + \ln 2$. La fonction f'_a est strictement positive sur $]a + \ln 2, +\infty[$, s'annule en $a + \ln 2$ et est strictement négative sur $] - \infty, a + \ln 2[$. On en déduit que la fonction f_a est strictement décroissante sur $] - \infty, a + \ln 2]$ et est strictement croissante sur $[a + \ln 2, +\infty[$ puis que

la fonction f_a admet un minimum en $a + \ln 2$.

2) Ce minimum est $f_a(a + \ln 2) = e^{a+\ln 2-a} - 2(a + \ln 2) + e^a = e^{\ln 2} - 2a - 2 \ln 2 + e^a = 2 - 2a - 2 \ln 2 + e^a$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, posons $g(a) = e^a - 2a + 2 - 2 \ln 2$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel a ,

$$g'(a) = e^a - 2.$$

La fonction g' est strictement négative sur $] - \infty, \ln 2[$ et strictement positive sur $] \ln 2, +\infty[$. La fonction g admet donc un minimum en $\ln 2$ et ce minimum est égal à

$$g(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 + 2 - 2 \ln 2 = 2 + 2 - 4 \ln 2 = 4 - 4 \ln 2.$$

Le minimum de f_a est minimum quand $a = \ln 2$ et le minimum correspondant est $4 - 4 \ln 2$.