Nouvelle Calédonie novembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (7 points) (commun à tous les candidats)

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.

Dans cet exercice les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».
La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est $0,17$. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est $0,10$.

La source A fournit 70% de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les évènements suivants :

A : « La bouteille d'eau provient de la source A »
B : « La bouteille d'eau provient de la source B »
S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

1) Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap S$.

2) Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut $0,149$.

3) Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.

4) Le lendemain d'une forte pluie, l'usine prélève un échantillon de 1 000 bouteilles provenant de la source A. Parmi ces bouteilles, 211 contiennent de l'eau très peu calcaire.
Donner un intervalle permettant d'estimer au seuil de 95% la proportion de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire sur l'ensemble de la production de la source A après cette intempérie.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart-type $1,6$.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B, associe le taux de calcium qu'elle contient. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 9 et d'écart-type σ.

1) Déterminer la probabilité pour que le taux de calcium mesuré dans une bouteille prise au hasard dans la production d'une journée de la source A soit compris entre $6,4$ mg et $9,6$ mg.

2) Calculer la probabilité $p(X \leqslant 6,5)$.

3) Déterminer σ sachant que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B contienne de l'eau très peu calcaire est $0,1$.

Partie C

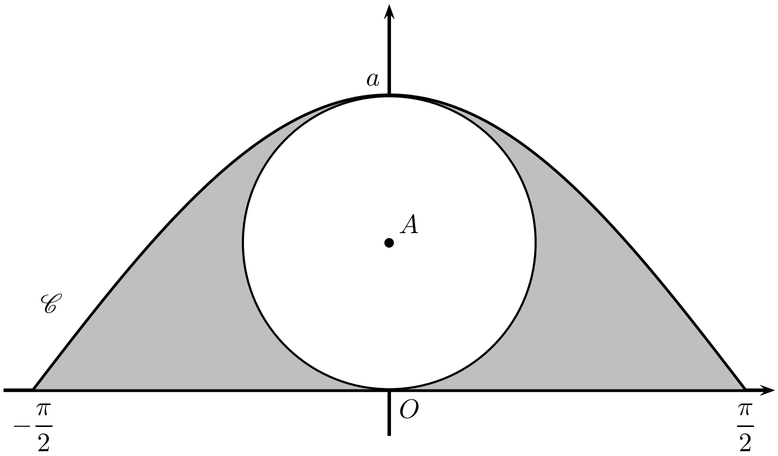
Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = a\cos x$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de a inférieures à $1,4$.

1) Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à $2a$ unités d'aire.

2) Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée.
Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?



a
A
$\mathscr{C}$
O
$-\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{\pi}{2}$

