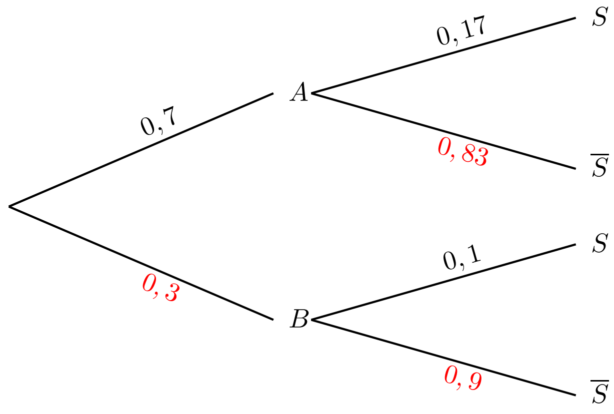
Nouvelle Calédonie novembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilité.



$p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,7 \times 0,17 = 0,119$.

$$\boxed{p(A \cap S) = 0,119.}$$

2) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) = 0,119 + 0,3 \times 0,1 = 0,149.$$

3) La probabilité demandée est $p_S(A)$.

$$p_S(A) = \frac{p(A \cap S)}{p(S)} = \frac{0,119}{0,149} = 0,799 \text{ arrondi au millième.}$$

4) Déterminons un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95%. Ici, $n = 1000$. D'autre part, la fréquence observée est $f = \dfrac{211}{1000} = 0,211$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $nf = 211 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 789 \geqslant 5$.
Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,211 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, f + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,179; 0,243]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

Partie B

1) La probabilité demandée est $P(6,4 \leqslant X \leqslant 9,6) = P\left(\mu_X - \sigma_X \leqslant X \leqslant \mu_X + \sigma_X\right)$. La calculatrice (ou le cours) fournit

$$P(6,4 \leqslant X \leqslant 9,6) = 0,683 \text{ arrondi au millième.}$$

2) La calculatrice fournit

$$P(X \leqslant 6,5) = 0,174 \text{ arrondi au millième.}$$

3) D'après la phrase initiale de l'énoncé, dire que l'eau est très peu calcaire équivaut à dire que $Y \leqslant 6,5$. Or,

$$Y \leqslant 6,5 \Leftrightarrow Y - 9 \leqslant -2,5 \Leftrightarrow \frac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\frac{2,5}{\sigma}.$$

La probabilité donnée dans l'énoncé est donc encore $P\left(\dfrac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\dfrac{2,5}{\sigma}\right)$ où cette fois-ci la variable $\dfrac{Y-9}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. La calculatrice fournit

$$P(Y \leqslant 6,5) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(\frac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\frac{2,5}{\sigma}\right) = 0,1 \Leftrightarrow -\frac{2,5}{\sigma} = -1,2815\ldots \Leftrightarrow \sigma = 1,951 \text{ arrondi au millième.}$$

Partie C

1) La fonction $x \mapsto a\cos x$ est continue et positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, l'aire emandée, exprimée en unités d'aire est

$$\mathscr{A}_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x \, dx = [a\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a(1-(-1)) = 2a.$$

2) D'autre part, l'aire du disque est $\mathscr{A}_2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow \frac{\pi a^2}{4} = 2a - \frac{\pi a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi a^2}{2} = 2a \Leftrightarrow a = \frac{4}{\pi}.$$

De plus, $\frac{4}{\pi} = 1,2\ldots$ et en particulier, $\frac{4}{\pi} < 1,4$. La contrainte est respectée pour $a = \frac{4}{\pi}$.

