

# Nouvelle Calédonie mars 2015. Enseignement spécifique

## EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On note  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites réelles définies, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3}u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + \sqrt{3}v_n \end{cases} .$$

- 1) Calculer les valeurs de  $u_1, v_1, u_2, v_2$ .
- 2) On souhaite construire un algorithme qui affiche les valeurs de  $u_N$  et  $v_N$  pour un entier naturel  $N$  donné.
  - a) On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	$N$ est un nombre entier
Variables :	$K$ est un nombre entier $S$ est un nombre réel $T$ est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à $S$ Affecter 0 à $T$ Affecter 0 à $K$
Traitement :	Tant que $K < N$ Affecter $\sqrt{3}S - T$ à $S$ Affecter $S + \sqrt{3}T$ à $T$ Affecter $K + 1$ à $K$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher $S$ Afficher $T$

Faire fonctionner cet algorithme pour  $N = 2$ . Pour cela, on recopiera et complétera le tableau de variables ci-dessous :

$S$	$T$	$K$
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

- b) L'algorithme précédent affiche-t-il les valeurs de  $u_N$  et  $v_N$  pour un entier  $N$  donné?  
Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de  $u_N$  et  $v_N$  pour un entier  $N$ .
- 3) On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = u_n + iv_n$ .  
On note  $a$  le nombre complexe  $a = \sqrt{3} + i$ .
  - a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$z_{n+1} = az_n.$$

- b) Écrire  $a$  sous forme exponentielle.
- c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{cases} u_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \\ v_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \end{cases} .$$