

EXERCICE 4 : corrigé

1) $u_1 = \sqrt{3}u_0 - v_0 = \sqrt{3} \times 1 - 0 = \sqrt{3}$ et $v_1 = u_0 + \sqrt{3}v_0 = 1 + \sqrt{3} \times 0 = 1$.
 $u_2 = \sqrt{3}u_1 - v_1 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 = 2$ et $v_2 = u_2 + \sqrt{3}v_1 = 2 + \sqrt{3} \times 1 = 2 + \sqrt{3}$.

$$u_1 = \sqrt{3}, v_1 = 1, u_2 = 2 \text{ et } v_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

2) a) Tableau complété.

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1
$3 - \sqrt{3}$	$6 - \sqrt{3}$	2

b) L'algorithme précédent n'affiche donc pas les valeurs de u_N et v_N puisque pour $N = 2$, on devrait obtenir $S = 2$ et $T = 2 + \sqrt{3}$.

Algorithme modifié.

Entrée :	N est un nombre entier
Variables :	K est un nombre entier S est un nombre réel T est un nombre réel U est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à S Affecter 0 à T Affecter 0 à K
Traitement :	Tant que $K < N$ Affecter S à U Affecter $\sqrt{3}U - T$ à S Affecter $U + \sqrt{3}T$ à T Affecter $K + 1$ à K Fin Tant que
Sortie :	Afficher S Afficher T

3) a) Soit n un entier naturel.

$$az_n = (\sqrt{3} + i)(u_n + iv_n) = \sqrt{3}u_n + i\sqrt{3}v_n + iu_n - \sqrt{3}v_n = (\sqrt{3}u_n - v_n) + i(u_n + \sqrt{3}v_n) \\ = u_{n+1} + iv_{n+1} = z_{n+1}.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, z_{n+1} = az_n.$$

b) $|a| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ puis

$$a = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel, $z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

- $z_0 = 1 + 0i = 1 = 2^0 e^{i\frac{0\pi}{6}}$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$. Alors,

$$z_{n+1} = az_n = 2e^{i\frac{\pi}{6}} z_n \text{ (d'après la question précédente)} \\ = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ = 2^{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{6}}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel, $z_n = 2^n e^{i \frac{n\pi}{6}}$.

On en déduit que pour tout entier naturel n , $u_n = \operatorname{Re}(z_n) = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ et $v_n = \operatorname{Im}(z_n) = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.

Pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ et $v_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.