Nouvelle Calédonie mars 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.

Soient le point A_1 de coordonnées $(0\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$.
On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 2 \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à la fois à D_1 et D_2.

1) a) Donner une représentation paramétrique de D_1.

b) Donner un vecteur directeur de D_2 (on le notera $\overrightarrow{u_2}$).

c) Le point $A_2(-1\ ;\ 4\ ;\ 2)$ appartient-il à D_2 ?

2) Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3) Soit le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. On définit la droite Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et la droite Δ_2 passant par A_2 et parallèle à Δ_1.
Justifier que les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

Dans la suite, on admettra que les droites D_2 et Δ_2 sont perpendiculaires.

4) Soit P_1 le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 et P_2 le plan défini par les droites D_2 et Δ_2.

a) Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 17 \\ -22 \\ 9 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P_1.

b) Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5) Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2. On admettra que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de Δ.
Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2.