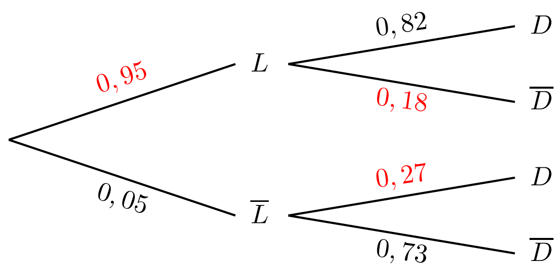
Nouvelle Calédonie mars 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) L'énoncé fournit $P_L(C) = 0,02$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $P\left(L \cap \overline{C}\right)$.

$$P\left(L \cap \overline{C}\right) = P(L) \times P_L\left(\overline{C}\right) = \left(1 - P\left(\overline{L}\right)\right)\left(1 - P_L(C)\right) = (1 - 0,05)(1 - 0,02) = 0,95 \times 0,98 = 0,931.$$

c) La probabilité demandée est $P\left(\overline{L} \cup C\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(\overline{L} \cup C\right) &= P\left(\overline{L} \cup (L \cap C)\right) = P\left(\overline{L}\right) + P\left(L \cap C\right) \ \left(\text{car } \overline{L} \cap (L \cap C) = \varnothing\right) \\ &= P\left(\overline{L}\right) + P(L) - P\left(L \cap \overline{C}\right) \ \text{(d'après la formule des probabilités totales)} \\ &= 1 - P\left(L \cap \overline{C}\right) = 1 - 0,931 = 0,069. \end{aligned}$$

2) a) L'énoncé fournit $P(X > 1000) = 0,98$. Soit $x > 0$.

$$P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - \left(\left(-e^{-\lambda x}\right) - \left(-e^{0}\right)\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right)$$
$$= e^{-\lambda x},$$

puis

$$P(X > 1000) = 0,98 \Leftrightarrow e^{-1000\lambda} = 0,98 \Leftrightarrow -1000\lambda = \ln(0,98) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,98)}{1000}.$$

b) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 10\,000)$.

$$P(X \geqslant 10\,000) = e^{-10\,000\lambda} = e^{10\ln(0,98)} = 0,817 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

c)

$$P(20\,000 \leqslant X \geqslant 30\,000) = P(X \geqslant 20\,000) - P(X \geqslant 30\,000) = e^{20\ln(0,98)} - e^{30\ln(0,98)} = 0,122 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

Ceci signifie qu'environ $12,2\%$ des puces auront une durée de vie comprise entre 20 000 et 30 000 heures.

3) a) La variable alétaoire Y est régie par un schéma de Benoulli. En effet,

- 15 000 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la puce a une durée de vie courte » avec une probabilité $p = 0,003$ et « la puce n'a pas une durée de vie courte » avec une probabilité $1 - p = 0,997$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0,003$.

b) $E(Y) = np = 15\,000 \times 0,003 = 45$.

c) La calculatrice fournit

$$P(40 \leqslant Y \leqslant 50) = P(Y \leqslant 50) - P(Y \leqslant 39) = 0,589 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

