Nouvelle Calédonie mars 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soit a un nombre réel strictement positif.
On note Δ_a la droite d'équation $y = ax$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a.
Pour cela, on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par

$$f_a(x) = e^x - ax.$$

On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1) Étude du cas particulier $a = 2$

La fonction f_2 est donc définie pour tout x réel par $f_2(x) = e^x - 2x$.

a) Étudier les variations de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$ (*on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition*).

b) En déduire que Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.

2) Étude du cas général où a est un réel strictement positif

a) Déterminer les limites de la fonction f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Étudier les variations de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a est $a - a\ln a$.

c) Étudier le signe de $a - a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a.

d) Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a.

