

**EXERCICE 1 : corrigé**

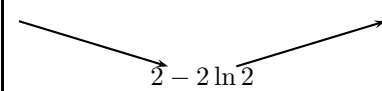
1) a) Pour tout réel  $x$ ,

$$f'_2(x) = e^x - 2.$$

Soit  $x$  un réel. Par stricte croissance de la fonction  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ ,

$$f'_2(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2.$$

De même,  $f'_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$ . En tenant compte de  $f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2$ , on en déduit le tableau de variation de la fonction  $f_2$ ,

|           |                                                                                    |         |           |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|
| $x$       | $-\infty$                                                                          | $\ln 2$ | $+\infty$ |
| $f'_2(x)$ | $-$                                                                                | $0$     | $+$       |
| $f_2$     |  |         |           |

b) La question précédente permet d'affirmer que la fonction  $f_2$  admet un minimum égal à  $2 - 2 \ln 2$ .

Puisque  $2 - 2 \ln 2 = 0,6 \dots$ , ce minimum est strictement positif. On en déduit que la fonction  $f_2$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  et en particulier la fonction  $f_2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  ou encore la courbe  $\Gamma$  et la droite  $\Delta_2$  n'ont pas de point d'intersection.

2) a) **Limite de la fonction  $f_a$  en  $-\infty$ .**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ . D'autre part, puisque  $a > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -ax = +\infty$ . En additionnant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = +\infty.$$

**Limite de la fonction  $f_a$  en  $+\infty$ .** Pour tout réel non nul  $x$ ,

$$f_a(x) = e^x \left(1 - \frac{ax}{e^x}\right) = e^x \left(1 - a \frac{1}{e^x/x}\right).$$

D'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - a \frac{1}{e^x/x}\right) = 1$ .

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et en multipliant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = +\infty.$$

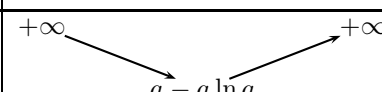
b) Pour tout réel  $x$ ,

$$f'_a(x) = e^x - a.$$

Soit  $x$  un réel. Par stricte croissance de la fonction  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ ,

$$f'_a(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > a \Leftrightarrow x > \ln a.$$

De même,  $f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln a$ . En tenant compte de  $f(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a = a - a \ln a$ , on en déduit le tableau de variation de la fonction  $f_a$ ,

|           |                                                                                      |         |           |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|
| $x$       | $-\infty$                                                                            | $\ln a$ | $+\infty$ |
| $f'_a(x)$ | $-$                                                                                  | $0$     | $+$       |
| $f_a$     |  |         |           |

En particulier, la fonction  $f_a$  admet un minimum égal à  $a - a \ln a$ .

c) Soit  $a$  un réel strictement positif.

$$a - a \ln a > 0 \Leftrightarrow a(1 - \ln a) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln a > 0 \Leftrightarrow \ln a < 1 \Leftrightarrow a < e,$$

et de même  $a - a \ln a = 0 \Leftrightarrow a = e$  et donc  $a - a \ln a < 0 \Leftrightarrow a > e$ .

d) • si  $a < e$ , alors  $a - \ln a > 0$ . La fonction  $f_a$  admet donc un minimum strictement positif. En particulier, la fonction  $f_a$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas, la courbe  $\Gamma$  et la droite  $\Delta_a$  n'ont pas de point d'intersection.

• Si  $a = e$ , la fonction  $f_a = f_e$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 1]$ , strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  et admet un minimum égal à 0. On en déduit que la fonction  $f_e$  s'annule une fois et une seule, en  $x = 1$ . La courbe  $\Gamma$  et la droite  $\Delta_e$  ont exactement un point d'intersection, le point de coordonnées  $(1, e)$ .

• Si  $a > e$ , la fonction  $f_a$  est continue et strictement décroissante sur  $] -\infty, \ln a]$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = +\infty > 0$  et  $f_a(\ln a) = a - a \ln a < 0$ . Donc, la fonction  $f_a$  s'annule une fois et une seule sur  $] -\infty, \ln a]$  et même sur  $] -\infty, \ln a[$ . De même, puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = +\infty$ , la fonction  $f_a$  s'annule une fois et une seule sur  $] \ln a, +\infty[$ . Dans ce cas, la courbe  $\Gamma$  et la droite  $\Delta_a$  ont exactement deux points d'intersection.

