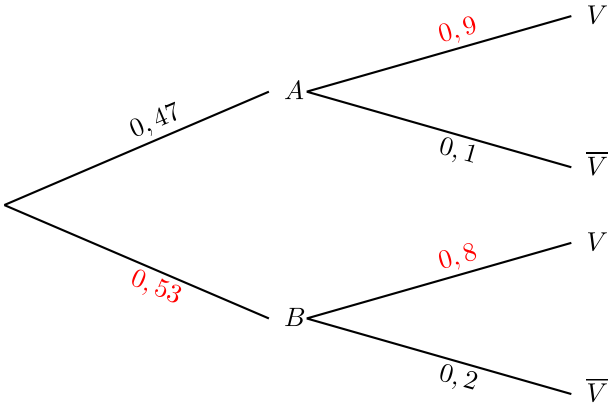
Liban 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) a) La probabilité demandée est $p(V)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(V) &= p(A) \times p_A(V) + p(B) \times p_B(V) \\ &= 0,47 \times (1 - 0,1) + (1 - 0,47) \times (1 - 0,2) = 0,847. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(V) = 0,847.}$$

b) La probabilité demandée est $p_V(A)$.

$$p_V(A) = \frac{p(A \cap V)}{p(V)} = \frac{p(A) \times p_A(V)}{p(V)} = \frac{0,47 \times 0,9}{0,847} = 0,499 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{p_V(A) = 0,499 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

3) L'événement considéré est l'événement $(A \cap V) \cup (B \cap \overline{V})$. La probabilité demandée est

$$\begin{aligned} p\left((A \cap V) \cup (B \cap \overline{V})\right) &= p(A \cap V) + p(B \cap \overline{V}) = p(A) \times p_A(V) + p(B) \times p_B(\overline{V}) \\ &= 0,47 \times 0,9 + 0,53 \times 0,2 = 0,529. \end{aligned}$$

4) La fréquence observée dans l'échantillon est $f = 0,529$.
On note que $n = 1200 \geqslant 30$, $nf = 634,8 \geqslant 5$ et $n(1 - f) = 565,2 \geqslant 5$.
Un intervalle de confiance au seuil de confiance $0,95$ est $\left[0,529 - \frac{1}{\sqrt{1200}}, 0,529 + \frac{1}{\sqrt{1200}}\right]$ ou encore $[0,5001; 0,5579]$ en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

La fourchette obtenue montre que le candidat A sera élu au seuil de confiance 95%.

5) Notons n le nombre de communications. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes contactées acceptant de répondre à l'enquête.
La variable X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux éventualités « la personne interrogée accepte de répondre » avec une probabilité $p = 0,4$ et « la personne interrogée n'accepte pas de répondre » avec une probabilité $p = 0,6$.

On sait que l'espérance de X est $np = n \times 0,4 = 0,4n$ ce qui signifie qu'en moyenne si n personnes sont interrogées, $0,4n$ acceptent de répondre.
On veut que $0,4n = 1200$ ou encore $n = \frac{1200}{0,4} = 3000$. Le temps nécessaire pour interroger ces 3000 personnes est 300 demi-heures ou encore 150 heures.

Le temps moyen à prévoir pour obtenir un échantillon de 1200 personnes est 150 heures.

