

EXERCICE 3 : corrigé

1) Notons f la fonction exponentielle. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 est $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$ ou encore $y = e + e(x - e)$ ou enfin $y = ex$.

2) Il semble que si

- si $m < 0$, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ ont exactement un point d'intersection.
- si $0 \leq m < e$, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ n'ont pas de point d'intersection.
- si $m = e$, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ ont exactement un point d'intersection.
- si $m > e$, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ ont exactement deux points d'intersection.

3) Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = e^x - mx$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$g'(x) = e^x - m.$$

• Si $m = 0$, pour tout réel x , $g(x) = e^x > 0$ et donc la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_0$ n'ont pas de point d'intersection.

• Si $m < 0$, pour tout réel x , $g'(x) > e^x > 0$ et donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -mx = -\infty$ (car $-m > 0$). Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -mx = +\infty$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

En résumé, la fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. On

sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ a une solution et une seule ou encore la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ ont exactement un point d'intersection.

• Si $m > 0$, pour tout réel x , $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln(m)$ et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(m)$. Donc, la fonction g est strictement décroissante sur $] -\infty, \ln(m)]$ et strictement croissante sur $[\ln(m), +\infty[$. En particulier, la fonction g admet un minimum strict en $\ln(m)$. De plus,

$$g(\ln(m)) = e^{\ln(m)} - m \ln(m) = m(1 - \ln(m)).$$

Si $0 < m < e$, alors $1 - \ln(m) > 1 - \ln(e) = 0$. Dans ce cas, le minimum de la fonction g est strictement positif et donc, la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$. En particulier, la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ou encore la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ n'ont pas de point commun.

Si $m = e$, le minimum de la fonction g est égal à 0. La fonction g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$ ou encore la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ ont exactement un point commun.

Si $m > e$, alors $1 - \ln(m) < 1 - \ln(e) = 0$. Dans ce cas, le minimum de la fonction g est strictement négatif.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -mx = +\infty$ (car $-m < 0$). Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

Pour tout réel strictement positif x , $g(x) = e^x \left(1 - m \frac{x}{e^x}\right) = e^x \left(1 - \frac{1}{e^{x/x}}\right)$. D'après un théorème de croissances com-

parées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x/x}} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{x/x}}\right) = 1$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

En résumé, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $] -\infty, \ln(m)]$, continue et strictement croissante sur $[\ln(m), +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, $g(\ln(m)) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Comme plus haut, l'équation $g(x) = 0$ a une solution et une seule dans $] -\infty, \ln(m)[$ et une solution et une seule dans $] \ln(m), +\infty[$ ou encore la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ ont exactement deux points d'intersection.