Liban 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (6 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

1) Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$.

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la valeur exacte de u_1.

3) a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ... Affecter à u la valeur ... Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b) A l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	$0,693\,1$	$0,306\,9$	$0,193\,1$	$0,140\,2$	$0,109\,8$	$0,090\,2$	$0,047\,5$	$0,009\,9$	$0,005\,0$

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4) a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

