

Liban 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$

$$u_0 = \ln(2).$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.$$

b) $u_1 = \frac{1}{0+1} - u_0 = 1 - \ln(2).$

$$u_1 = 1 - \ln(2).$$

3) a) Algorithme complété.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur $\ln(2)$
Traitement :	Pour i variant de 1 à n Affecter à u la valeur $\frac{1}{i} - u$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante, convergente, de limite nulle.

4) a) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx$$

Pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $1+x > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0, 1]$, $\frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0$. Par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx \leq 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ou encore $u_{n+1} \leq u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

b) Pour tout réel x de $[0, 1]$, $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \geq 0$ ou encore $u_n \geq 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel positif ou nul.

5) Soit n un entier naturel. Puisque $u_{n+1} \geq 0$,

$$0 \leq u_n \leq u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.