France métropolitaine/Réunion 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie 1

1) f est dérivable sur $[0, 20]$ et pour tout réel x de $[0, 20]$,

$$f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 = \ln(x+1) - 2.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0, 20],\ f'(x) = \ln(x+1) - 2.}$$

2) Soit $x \in [0, 20]$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 2 \\ &\Leftrightarrow x + 1 > e^2 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x > e^2 - 1, \end{aligned}$$

avec $e^2 - 1 = 6,38\ldots$ de sorte que $0 < e^2 - 1 < 20$. De même, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$.
D'autre part, $f(0) = \ln(1) + 7 = 7$, $f(20) = 21\ln(21) - 53 = 10,9\ldots$ et enfin,

$$f\left(e^2 - 1\right) = e^2 \ln\left(e^2\right) - 3\left(e^2 - 1\right) + 7 = 2e^2 - 3e^2 + 10 = 10 - e^2 = 2,6\ldots$$

On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		$e^2 - 1$		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	7	$\searrow$	$2,6\ldots$	$\nearrow$	$10,9\ldots$

3) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 est $f'(0)$ avec $f'(0) = \ln(1) - 2 = -2$.

4) La fonction g est une primitive de la fonction $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$ sur $[0, 20]$ et donc, une primitive de la fonction f sur $[0, 20]$ est la fonction F définie sur $[0, 20]$ par

$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x.$$

Partie 2

1) D'après l'étude des variations de la fonction f, la différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est

$$f(20) - f\left(e^2 - 1\right) = (21\ln(21) - 53) - \left(10 - e^2\right) = 21\ln(21) + e^2 - 63 = 8,3\ldots$$

La proposition P_1 est donc exacte.

D'après la question 3) de la partie, l'inclinaison de la piste en B est $|f'(0)| = 2$. Le double de l'inclinaison de la piste en C est

$$2\,|f'(20)| = 2(\ln(21) - 2) = 2,08\ldots.$$

La proposition P_2 est donc vraie.

2) Deux fois l'aire de la face latérale $ODBC$ exprimée en m^2 est

$$\begin{aligned} 2\int_0^{20} f(x)\,dx &= 2\,[F(x)]_0^{20} = 2\,(F(20) - F(0)) = 2F(20) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}21^2\ln(21) - \frac{7}{4} \times 20^2 + \frac{13}{2} \times 20\right) = 441\ln(21) - 1140 \end{aligned}$$

puis l'aire de la face latérale $OAB'B$ exprimée en m^2 est

$$10 \times f(0) = 70,$$

et l'aire de la face latérale $CD'C'C$ exprimée en m^2 est

$$10 \times f(20) = 210\ln(21) - 530.$$

L'aire totale à peindre en rouge exprimée en m^2 est

$$441\ln(21) - 1140 + 70 + 210\ln(21) - 530 = 651\ln(21) - 1600.$$

La quantité de peinture nécessaire est

$$\frac{651\ln(21) - 1600}{5} = 76,3\ldots$$

Le nombre minimum de litres de peinture rouge nécessaire est 77 litres à 1 litre près.

3) a) Pour $0 \leqslant k \leqslant 19$,

$$\begin{aligned} B_kB_{k+1} &= \sqrt{\left(x_{B_{k+1}} - x_{B_k}\right)^2 + \left(y_{B_{k+1}} - y_{B_k}\right)^2} = \sqrt{(k+1-k)^2 + (f(k+1) - f(k))^2} \\ &= \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}. \end{aligned}$$

b) Algorithme complété.

Variables Fonction	S : réel K : entier f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de 0 à 19 S prend pour valeur $S + 10\sqrt{1 + (f(K+1) - f(K))^2}$ Fin Pour
Sortie	Afficher S

