France métropolitaine/Réunion 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2-0, (-1)-(-1), 5-5)$ ou encore $(2,0,0)$. On en déduit que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OI}$ puis que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OI}$ et donc que

$$\boxed{\text{la droite } (AB) \text{ est parallèle à la droite } (OI).}$$

b) Les points C et D appartiennent au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x = 11$ et donc la droite (CD) est contenue dans ce plan. D'autre part, le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x = 11$ est parallèle au plan (OJK).

$$\boxed{\text{La droite } (CD) \text{ est dans le plan } \mathscr{P} : x = 11, \text{ plan qui est parallèle à } (OJK).}$$

c) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - 11 = 0$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,0,0)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OI}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(2,0,0)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

La droite (AB) est la droite passant par $A(0,-1,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1,0,0)$. Un système d'équations paramétriques de (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, le point $M_t(t,-1,5)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $t = 11$. Pour $t = 11$, on obtient le point $E(11,-1,5)$.

$$\boxed{\text{La droite } (AB) \text{ est perpendiculaire au plan } \mathscr{P} \text{ au point } E(11,-1,5).}$$

d) La droite (CD) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Donc les droites (AB) et (CD) sont orthogonales et en particulier, les droites (AB) et (CD) sont sécantes ou non coplanaires.

Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point, ce point est nécessairement un point de la droite (AB) qui est dans $\mathscr{P}$ c'est-à-dire le point E. Donc, les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si le point E appartient la droite (CD).

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont $(0,4,3)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ sont $(0,-1,4)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc le point E n'appartient pas à la droite (CD). Finalement,

$$\boxed{\text{les droites } (AB) \text{ et } (CD) \text{ ne sont pas sécantes.}}$$

2) a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M_tN_t^2 &= (11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2 = t^2 - 22t + 121 + 0,64t^2 + 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t + 16 \\ &= 2t^2 - 25,2t + 138. \end{aligned}$$

b) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = 2t^2 - 25,2t + 138$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $f'(t) = 4t - 25,2$. La fonction f' est négative sur $\left]-\infty, \dfrac{25,2}{4}\right] =]-\infty; 6,3]$ et positive sur $[6,3; +\infty[$.

Par suite, la fonction f admet un minimum en $t_0 = 6,3$. Puisque la distance M_tN_t est minimale si et seulement si $M_tN_t^2 = f(t)$ est minimal, la distance M_tN_t est minimale à l'instant $t_0 = 6,3$ s.

