Centres étrangers 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (7 points) (commun à tous les candidats)

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)$.

1) Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2) Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1) permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif.
Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que ... ... Fin tant que
Sortie	Afficher n

a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b) A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

