

Centres étrangers 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1.$$

D'autre part, pour tout réel x ,

$$(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1 = g'(x).$$

Pour tout réel x , $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

b) Pour tout réel x , $e^x > 0$ et donc $2e^x + 1 > 0$. On en déduit que pour tout réel x , $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1$. On sait que pour tout réel x , $e^x - 1 > 0$ si $x > 0$, $e^x - 1 = 0$ si $x = 0$ et $e^x - 1 < 0$ si $x < 0$. On en déduit que la fonction g' est strictement négative sur $] -\infty, 0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0.

La fonction g est ainsi strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. La fonction g admet donc un minimum en 0 et ce minimum est

$$g(0) = e^0 - e^0 - 0 = 0.$$

On en déduit que la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$.

c) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n).$$

Puisque la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel n , $g(u_n) \geq 0$ et donc pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou enfin pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$. Ceci montre que

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.

- $u_0 = a$ avec $a \leq 0$. Donc, l'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n \leq 0$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{u_n} \leq 1$ puis $e^{u_n} - 1 \leq 0$. D'autre part, $e^{u_n} \geq 0$ et donc $e^{u_n}(e^{u_n} - 1) \leq 0$ ou encore $u_{n+1} \leq 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.

b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

c) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 0$.

- $u_0 = a$ avec $a = 0$. Donc, l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = 0$. Alors $u_{n+1} = e^0 - e^0 = 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 0$. En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n \geq a > 0$. D'après la question 1)b), la fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que $g(u_n) \geq g(a)$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq a + ng(a)$.

- $u_0 = a$ et $a + 0 \times g(a) = a$. Donc, $u_0 \geq a + 0 \times g(a)$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n \geq a + ng(a)$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\geq u_n + g(a) \text{ (d'après la question précédente)} \\ &\geq a + ng(a) + g(a) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= a + (n+1)g(a). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq a + ng(a)$.

c) Puisque $a > 0$, on a encore $g(a) > 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a + ng(a)) = +\infty$. Puisque pour tout entier naturel n , $u_n \geq a + ng(a)$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4) a) Algorithme complété.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que $u \leq M$ u prend la valeur $e^{2u} - e^u$ n prend la valeur $n + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

b) Si $M = 60$, la calculatrice fournit $n = 36$.