

Centres étrangers 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-1| = |z-i|$ est l'ensemble des points du plan à égale distance des points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Cet ensemble est la première bissectrice ou encore cet ensemble est la droite d'équation $y = x$ ou enfin cet ensemble est la droite (AB) .

Pour tout nombre complexe z , $|z-3-2i| \leq 2 \Leftrightarrow |z-(3+2i)| \leq 2$. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-(3+2i)| \leq 2$ est l'ensemble des points dont la distance au point de coordonnées $(3, 2)$ est inférieure ou égale à 2. Cet ensemble est le disque de centre le point de coordonnées $(3, 2)$ et de rayon 2 qui est effectivement le disque dessiné sur la figure.

L'ensemble cherché est l'ensemble des points de la droite (AB) situés à l'intérieur du disque. Cet ensemble est effectivement le segment $[AB]$. La proposition 1 est vraie.

2) $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ puis

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^{1515} &= (2e^{i\frac{\pi}{6}})^{1515} = 2^{1515} e^{i\frac{1515\pi}{6}} = 2^{1515} e^{i\frac{505\pi}{2}} = 2^{1515} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{504\pi}{2})} = 2^{1515} e^{i(\frac{\pi}{2} + 252\pi)} \\ &= 2^{1515} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{1515} i. \end{aligned}$$

Donc, $(\sqrt{3} + i)^{1515}$ n'est pas un réel et la proposition 2 est fausse.

3) La droite (EF) est la droite passant par $E(2, 1, -3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EF}(-1, -2, 5)$. Une représentation paramétrique de la droite (EF) est

$$\begin{cases} x = 2 - u \\ y = 1 - 2u \\ z = -3 + 5u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Pour $u = 2$, on obtient le point de coordonnées $(0, -3, 7)$ qui est un autre point de la droite (EF) . D'autre part, un autre vecteur directeur de la droite (EF) est le vecteur $-2\overrightarrow{EF}$ de coordonnées $(2, 4, -10)$. Une autre représentation paramétrique de la droite (EF) est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Donc, la proposition 3 est vraie.

4) Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $(-1, -2, 5)$ et le vecteur $\overrightarrow{EG}$ a pour coordonnées $(-3, 2, 4)$. Donc,

- $EF = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{30}$;
- $EG = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}$;
- $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = (-1) \times (-3) + (-2) \times 2 + 5 \times 4 = 19$.

On en déduit que

$$\cos \widehat{FEG} = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{EF \times EG} = \frac{19}{\sqrt{30} \times \sqrt{29}} = \frac{19}{\sqrt{870}}.$$

La calculatrice fournit $\widehat{FEG} = 49,8\dots^\circ$ ou encore $\widehat{FEG} = 50^\circ$ arrondi au degré. La proposition 4 est vraie.