Asie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) a) Le discriminant de l'équation $z^2+z+1=0$ est $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = -3 < 0$. L'équation $z^2+z+1=0$ admet deux solutions complexes non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2+z+1=0 \text{ sont } -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

b) En particulier, le nombre $j = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est solution de l'équation $z^2+z+1=0$.

2) $|j| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$ puis

$$j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$ ou encore

$$\boxed{j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.}$$

3) a) $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{\frac{2i\pi\times 3}{3}} = e^{2i\pi} = \cos(2\pi)+i\sin(2\pi) = 1$.

b) j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$ et donc $j^2+j+1=0$ puis $j^2 = -1-j$.

4) $\left|j^2-1\right| = \left|1-j^2\right| = \left|j^3-j^2\right| = \left|j^2\right|\times|j-1| = |j|^2\times|j-1| = |j-1|$ et $\left|j^2-j\right| = \left|1-j^2\right| = |j|\times|j-1| = |j-1|$.

En résumé, $|j-1| = \left|j^2-1\right| = \left|j^2-j\right|$ ou encore $PQ = PR = QR$. On en déduit que

$$\boxed{\text{Le triangle } PQR \text{ est équilatéral.}}$$

Partie B

1) $a-c = -jb-j^2c-c = -jb+(j+1)c-c = -jb+jc = j(c-b)$.

2) $AC = CA = |a-c| = |j(c-b)| = |j|\times|c-b| = |c-b| = BC$.

3) $a-b = -jb-j^2c-b = (-j-1)b-j^2c = j^2bj^2c = j^2(b-c)$.

4) $BA = |a-b| = \left|j^2(b-c)\right| = |j|^2\,|b-c| = |b-c| = CB$. Ainsi, $AB = AC = BC$ et donc

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est équilatéral.}}$$

