

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout x de $[0, 1]$, $x \geq 0$ et $e^{n(x-1)} \geq 0$ puis pour tout x de $[0, 1]$, $x + e^{n(x-1)} \geq 0$. Donc, la fonction f_n est positive sur $[0, 1]$.
- La fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$f'_n(x) = 1 + ne^{n(x-1)}.$$

Pour tout x de $[0, 1]$, $ne^{n(x-1)} \geq 0$ puis $1 + ne^{n(x-1)} \geq 0$. La fonction f'_n est positive sur $[0, 1]$ et donc la fonction f_n est croissante sur $[0, 1]$.

2) Pour tout entier naturel n , $f_n(1) = 1 + e^0 = 2$. Donc, le point $A(1, 2)$ appartient à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$.

3) Il semble que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_n$ tende vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Démontrons ce résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_n$ est

$$f'_n(x_A) = f'_n(1) = 1 + ne^0 = n + 1.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$, le résultat est démontré.

Partie B

1) Pour tout entier naturel n , $u_n = f_n(1) = 2$. Dans le cas où $x = 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et en particulier convergente, de limite 2.

2) Soit $x \in [0, 1[$. Pour tout entier naturel n , $e^{n(x-1)} = (e^{x-1})^n$. La suite $((e^{x-1})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{x-1}$. Puisque $x < 1$, on a $x - 1 < 0$ puis $0 < e^{x-1} < 1$ et en particulier $-1 < q < 1$. On sait alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n(x-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x + 0 = x$.

Pour tout x de $[0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$.

Partie C

Il semble que, quand n tend vers $+\infty$, A_n tende vers l'aire du triangle dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$ ou encore il semble que, quand n tend vers $+\infty$, A_n tende vers $\frac{1}{2}$. Démontrons ce résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc,

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 (x + e^{n(x-1)}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{n} e^{n(x-1)} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} e^0 \right) - \left(0 + \frac{1}{n} e^{-n} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-n}}{n}. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n}) = 1 - 0 = 1$. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. En divisant, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n} = 0$ et finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{1}{2}$.