Asie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de flèches qui atteignent la cible. X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues, « la flèche atteint la cible »avec une probabilité $p = 0,8$ et « la flèche n'atteint pas la cible »avec une probabilité $1 - p = 0,2$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$.

La probabilité demandée est $P(X \geqslant 3)$. La calculatrice fournit

$$\begin{aligned}P(X \geqslant 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} 0,8^3 0,2^1 + \binom{4}{4} 0,8^4 0,2^0 = 0,8^4 + 4 \times 0,8^3 \times 0,2 = 2 \times 0,8^4 \\ &= 0,819 \text{ arrondi au millième.}\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geqslant 3) = 0,819 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) Dans cette question, on note n le nombre de flèches tirées et X la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. On sait que $E(X) = np = 0,8n$. On veut que cette espérance soit égale à 12.

$$E(X) = 12 \Leftrightarrow 0,8n = 12 \Leftrightarrow n = \frac{12}{0,8} \Leftrightarrow n = 15.$$

$$\boxed{\text{Le concurrent doit prévoir 15 flèches pour atteindre 12 fois la cible en moyenne.}}$$

Partie B

1) La probabilité demandée est $P((X < -10) \cup (X > 10)) = 1 - P(-10 \leqslant X \leqslant 10) = 1 - P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$. La calculatrice (ou le cours) fournit $P(-10 \leqslant X \leqslant 10) = 0,683$ arrondi au millième ou encore

$$\boxed{P((X < -10) \cup (X > 10)) = 0,317 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) Soit x l'abscisse du bord vertical droit de la cible. On veut $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 0,6$. Or

$$\begin{aligned}P(-x \leqslant X \leqslant x) &= P(X \leqslant x) - P(X \leqslant -x) = P(X \leqslant x) - P(X \geqslant x) = P(X \leqslant x) - (1 - P(X \leqslant x)) \\ &= 2P(X \leqslant x) - 1,\end{aligned}$$

puis $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 0,6 \Leftrightarrow 2P(X \leqslant x) - 1 = 0,6 \Leftrightarrow P(X \leqslant x) = 0,8$. La calculatrice fournit alors $x = 8,4$ arrondi au dixième.

Pour quer la probabilité considérée soit égale à $0,6$, il faut et il suffit que les bords verticaux aient pour équations respectives $x = 8,4$ arrondi au dixième et $x = -8,4$ arrondi au dixième.

Partie C

1) Soit a un réel positif.

$$\begin{aligned}P(T \leqslant a) &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a} \\ &= 1 - e^{-0,0001a}\end{aligned}$$

et aussi

$$P(T \geqslant a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-0,0001a}\right) = e^{-0,0001a}.$$

La probabilité demandée est $P(T \geqslant 2000)$.

$$P(T \geqslant 2000) = e^{-0,0001 \times 2000} = e^{-0,2} = 0,819 \text{ arrondi au millième.}$$

$$\boxed{P(T \geqslant 2000) = 0,819 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) a) La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$F'(t) = (-1)e^{-\lambda t} + \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} = f(t).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Soit x un réel positif.

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \left[\left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^0 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(-\lambda x)e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}.$$

Déjà, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \to +\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \lim_{X \to -\infty} X e^X = 0.$$

On en déduit que

$$E(T) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda} + \frac{0}{\lambda} - \frac{0}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ici, $\lambda = 10^{-4}$ et donc $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 10^4$. Ainsi, l'espérance de durée de vie du panneau électrique est de 10 000 heures.

