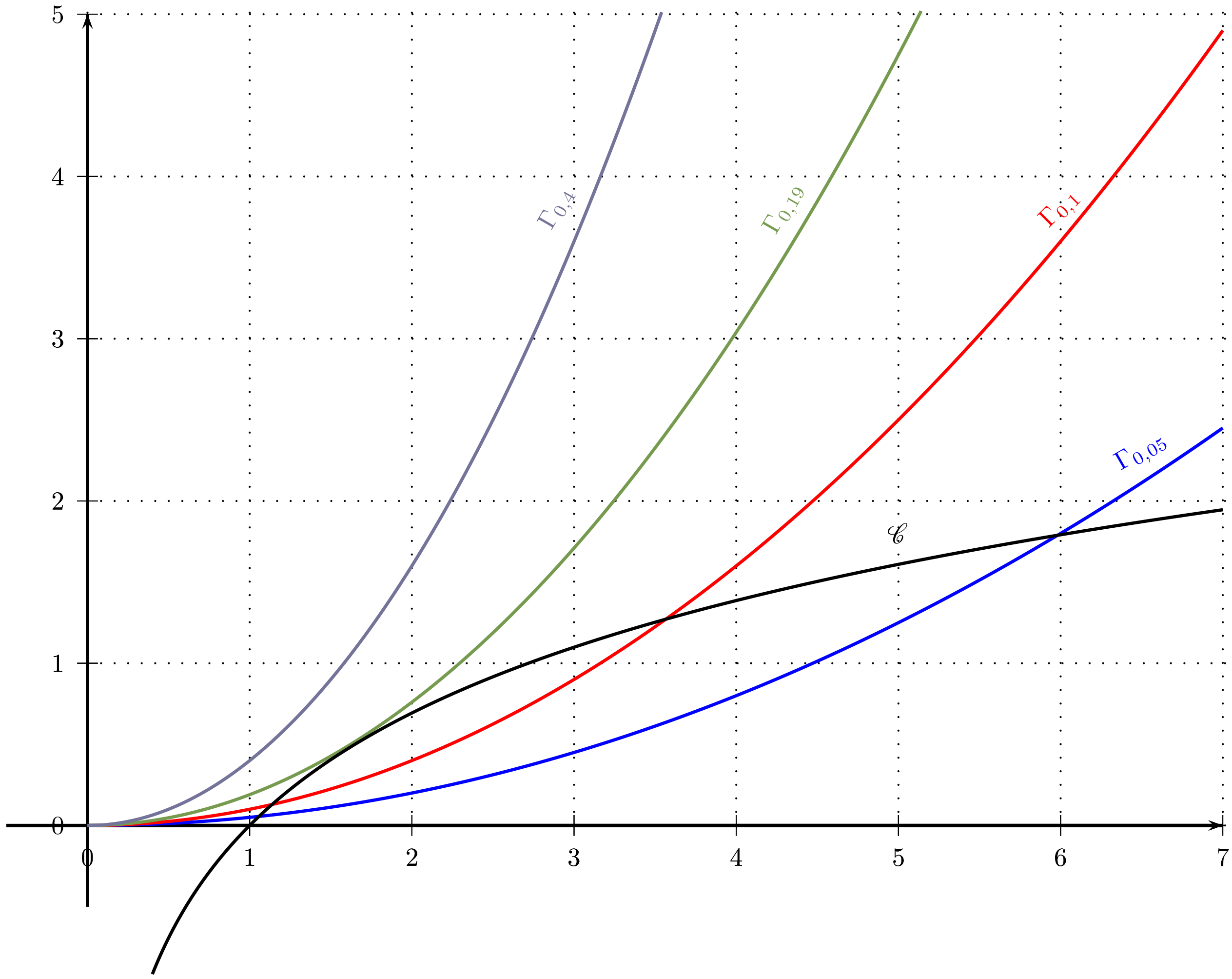
Antilles Guyane 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Graphes.



2) Il semble que si $a > 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a n'aient pas de point commun, si $a = 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a aient exactement un point commun et si $0 < a < 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a aient exactement deux points communs.

Partie B

1) Soient $x > 0$ puis M un point du plan d'abscisse x.

$$M \in \mathscr{C} \cap \Gamma_a \Leftrightarrow \ln(x) = ax^2 \Leftrightarrow \ln(x) - ax^2 = 0 \Leftrightarrow h_a(x) = 0.$$

Donc, les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a sont les solutions de l'équation $h_a(x) = 0$.

2) a) Pour tout réel x, $h'_a(x) = \dfrac{1}{x} - 2ax = \dfrac{1-2ax^2}{x}$. Sur $]0,+\infty[$, $h'_a(x)$ est du signe de $1 - 2ax^2$.

Pour $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, on a $x^2 < \dfrac{1}{2a}$ (par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $[0,+\infty[$) puis $2ax^2 < 1$ et enfin $1 - 2ax^2 > 0$.

Pour $x > \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, on a $x^2 > \dfrac{1}{2a}$ puis $2ax^2 > 1$ et enfin $1 - 2ax^2 < 0$.

Pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, on a $x^2 = \dfrac{1}{2a}$ puis $1 - 2ax^2 = 0$.

En résumé, la fonction h'_a est strictement positive sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right[$, strictement négative sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty\right[$ et s'annule en $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

b) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Pour $x>0$,

$$h_a(x)=x\left(\frac{\ln(x)}{x}-ax\right).$$

Puisque $a>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}ax=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$. En retranchant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}-ax\right)=-\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}h_a(x)=-\infty.}$$

3) a) La fonction $h_{0,1}$ est continue et strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$. De plus, $\lim\limits_{x\to0}h_{0,1}(x)=-\infty<0$ et $h_{0,1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right)=\dfrac{-1-\ln(0,2)}{2}=0,3\ldots>0$.

Donc, la fonction $h_{0,1}$ s'annule une fois et une seule sur $\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$.

b) Puisque l'équation $h_a(x)=0$ admet exactement deux solutions, d'après la question 1), les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a ont exactement deux points d'intersection.

4) a) Le maximum de la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ est

$$h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{\frac{1}{2(1/2e)}}\right)=h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1}{2}\left(-1-\ln\left(\frac{2}{2e}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\ln(e)\right)=0.$$

b) D'après la question 2)a), la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ est strictement croissante sur $]0,\sqrt{e}]$. Donc, pour $x\in]0,\sqrt{e}[$, $h_{\frac{1}{2e}}(x)<h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right)=0$.
De même, la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ est strictement décroissante sur $[\sqrt{e},+\infty[$. Donc, pour $x\in]\sqrt{e},+\infty[$, $h_{\frac{1}{2e}}(x)<h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right)=0$.

En particulier, pour tout réel strictement positif x distinct de $\sqrt{e}$, $h_{\frac{1}{2e}}(x)\neq0$. D'autre part, $h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right)=0$. On en déduit que la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ s'annule une fois et une seule sur $]0,+\infty[$. D'après la question 1), les courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ ont un point d'intersection et un seul.

5) Si $\dfrac{-1-\ln(2a)}{2}>0$, comme à la question 3), les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a ont au moins un point commun et si $\dfrac{-1-\ln(2a)}{2}=0$, les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a ont un point commun d'après la question 4). Enfin, si $\dfrac{-1-\ln(2a)}{2}<0$, la fonction h_a a un maximuym strictement négatif. En particulier, la fonction h_a ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ ou encore les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont pas de point d'intersection. En résumé,

$$\begin{aligned}\mathscr{C}\cap\Gamma_a=\varnothing&\Leftrightarrow\frac{-1-\ln(2a)}{2}<0\Leftrightarrow-1-\ln(2a)<0\Leftrightarrow1+\ln(2a)>0\\&\Leftrightarrow\ln(2a)>-1\Leftrightarrow2a>e^{-1}\\&\Leftrightarrow a>\frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

