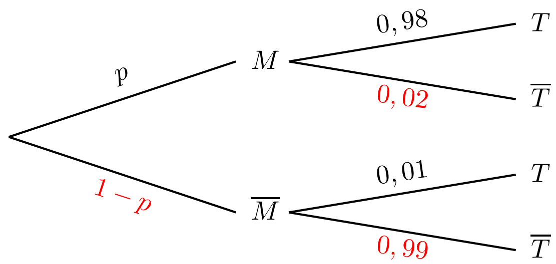
Amérique du Sud 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) a) L'énoncé fournit $P_M(T) = 0,98$, $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$ et $P(M) = p$. Représentons la situation par un arbre de probabilité.



b) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,98p$. $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,01(1-p) = 0,01 - 0,01p$. Enfin, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,98p + 0,01 - 0,01p = 0,97p + 0,01.$$

2) a)

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,98p}{0,97p + 0,01} = \frac{0,98p \times 100}{(0,97p + 0,01) \times 100} = \frac{98p}{97p + 1}.$$

b) La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$ et pour tout réel p de $[0,1]$,

$$f'(p) = \frac{98(97p+1) - 98p \times 97}{(97p+1)^2} = \frac{98}{(97p+1)^2}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $[0,1]$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$.

3) Le test est fiable quand $P_T(M) \geqslant 0,95$ ou encore $f(p) \geqslant 0,95$.

$$f(p) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow \frac{98p}{97p+1} \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 98p \geqslant 92,15p + 0,95 \Leftrightarrow 5,85p \geqslant 0,95$$
$$\Leftrightarrow p \geqslant \frac{0,95}{5,85} \Leftrightarrow p \geqslant \frac{95}{585} \Leftrightarrow p \geqslant \frac{19}{117}.$$

Partie B

1) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 1000 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne est atteinte par le virus » avec une probabilité $p = 0,15$ et « la personne n'est pas atteinte par le virus » avec une probabilité $1 - p = 0,85$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,15$. On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 1000$,

$$P(X = k) = \binom{1000}{k}(0,15)^k(0,85)^{1000-k}.$$

b) On note tout d'abord que $n \geqslant 30$ puis $np = 150$ et donc $np \geqslant 5$ et aussi $n(1-p) = 850$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,15 - 1,96\sqrt{\frac{0,15 \times (1-0,15)}{1000}}, 0,15 + 1,96\sqrt{\frac{0,15 \times (1-0,15)}{1000}}\right]$$
$$= [0,127; 0,173].$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée dans l'échantillon est $f = \dfrac{197}{1000} = 0,197$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc on peut affirmer que le pourcentage de 15% publié par l'institut de veille sanitaire est faux au risque de se tromper de 5%.

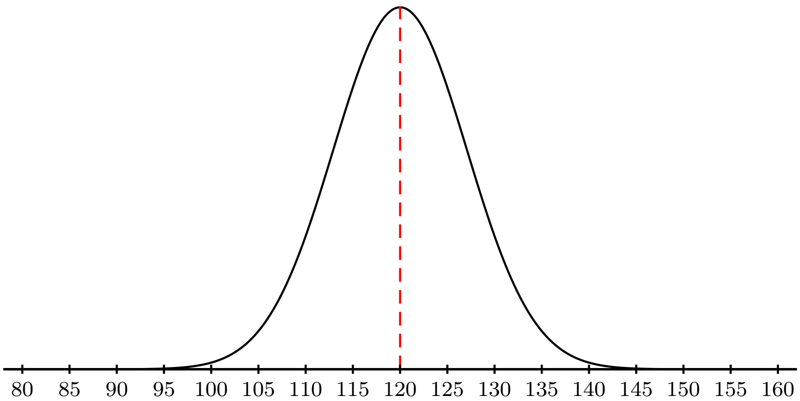
2) Ici, $n = 1000$ et $f = 0,197$. On est dans les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance car $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,197 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, 0,197 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,165; 0,229]$$

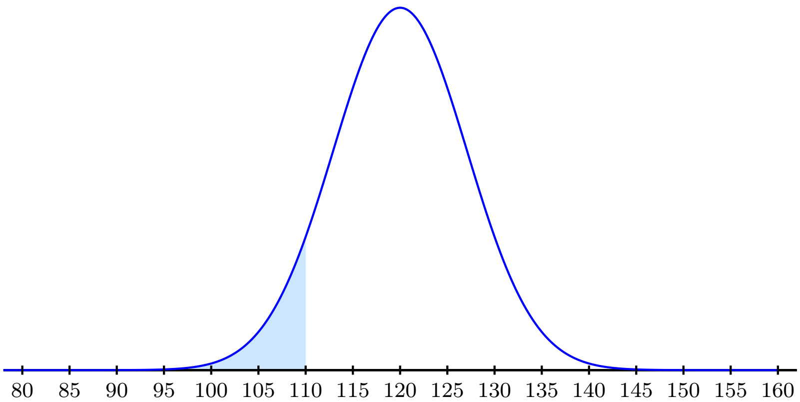
en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La probabilité p appartient à l'intervalle $[0,165; 0,229]$ avec un niveau de confiance de 95%.

Partie C

1) a) Il semble que $\mu = 120$.



b)



2) a) On sait que T' suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

b)

$$T < 110 \Leftrightarrow T - \mu < 110 - \mu \Leftrightarrow \frac{T-\mu}{10} < \frac{110-\mu}{10} \Leftrightarrow$$

et donc $P(T < 110) = P\left(T' < \dfrac{110-\mu}{10}\right) = P\left(T' \leqslant \dfrac{110-\mu}{10}\right)$. La calculatrice fournit

$$P\left(T' \leqslant \frac{110-\mu}{10}\right) = 0,18 \Leftrightarrow \frac{110-\mu}{10} = -0,91\ldots$$

puis $\mu = 110 + 10 \times 0,91\ldots = 119,1\ldots$ à l'unité près par excès. Ceci valide la conjecture de la question 1)a).

